Problemas de Matemáticas II
Ciencias y Tecnología

Por materias
(PAU 2019-2020)

Prof: **Isaac Musat Hervás**

última actualización:

7 de enero de 2021

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Resúmenes teóricos

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.
- **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.
- **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

- La matriz tiene que ser cuadrada

  a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.

- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinate de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array} \right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|},\ \ x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

1.2. Andalucia

1.2.1. Modelo de 2020

Problema 1.2.1 Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -c = b \\ -d = -a \\ a = d \\ b = -c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = d \\ b = -c \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} a = d \\ b = -c \\ a + d = 1 \\ ad - cb = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = d = \frac{1}{2} \\ b = -c \\ \frac{1}{4} + b = 2 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = d = \frac{1}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \text{ o } \left\{\begin{array}{l} a = d = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$
considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Solución:

$$X^tA = B^t \Longrightarrow (x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = (2m^2-1\ \ m\ \ 1) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} (2-m)x + y + mz = 2m^2 - 1 \\ x + my + z = m \\ (2m-1)x + y + z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A| = -2(m^3 - 3m + 2) = 0 \Longrightarrow m = -2\ \ m = 1$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $m = -2$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 = F_2 \\ F_2 = F_1 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) =$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-4F_1 \\ F_3+5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & -9 & 6 & -9 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
Sistema incompatible.

- Si $m = 1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Tenemos $F_1 = F_2 = F_3 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 1 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

1.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.2.3 Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$.

Solución:

a) $|A| = -(2m^2 + 3m - 5) = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = -\dfrac{5}{2}$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \left\{1, -\dfrac{5}{2}\right\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.
- Si $m = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) =$ 2.
- Si $m = -\dfrac{5}{2} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

b) Si $m = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $(2020A)^{-1} = -\dfrac{1}{2020 \cdot 9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{18180}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.2.4 Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a.

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array}\right)$, con $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

$$|A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{array}\right| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow$$

- Si $a = 0$ como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$ y en este caso Rango(A) = 2 =Rango$(\overline{A})$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
- Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A_2| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow \text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

b) Para que el sistema tenga solución tiene que ser $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ 4x+y+4z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$y+z=4 \Longrightarrow 0+\lambda=4 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=0 \\ z=4 \end{array}\right.$$

.

1.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.2.5 Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo
$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{array}\right)$, $X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$ y $B = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2m \\ 1 \end{array}\right)$.

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = m^2-2m-8 = 0 \Longrightarrow m=-2$ y $m=4$.

- Si $m \neq -2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-4F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $m=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+2F_1 \\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$
$\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Si $m=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z=2 \\ -3z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/3+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1/3 \end{array}\right.$$

Luego no existe ninguna solución con $z=0$

Problema 1.2.6 Considera $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ y $X=\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$,

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=0$. Existe alguna solución tal que $z=1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) $|A-\lambda I|=\left|\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)\right|=\left|\begin{array}{ccc} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right|=$
$(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0 \Longrightarrow \lambda=2$ y $\lambda=\pm 1$.

b) Si $\lambda=1 \Longrightarrow (A-I)X=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
$\left\{\begin{array}{l} 2y+3z=0 \\ -y+2z=0 \\ y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ Luego no hay ninguna solución con $z=1$.

1.3. Aragón

1.3.1. Modelo de 2020

Problema 1.3.1 Considere las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ y } B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Encuentre la matriz X que resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$AX-X=B$$

Solución:
$AX-X=B \Longrightarrow (A-I)X=B \Longrightarrow X=(A-I)^{-1}B=$
$$\left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\right)^{-1}\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Problema 1.3.2 Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si existe la matriz inversa de B.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|B| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$

Problema 1.3.3 Sea k un parámetro real y considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{array} \right.$$

Determine los valores del parámetro real k, para lo que ese sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Solución:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array} \right)$, $|A| = -(k^2 + k - 6) = 0 \Longrightarrow k = -3$ y $k = 2$.

- Si $k \neq -3$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $k = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 4F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

1.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.3.4 Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+(m+1)z=2\\ x+(m-1)y+2z=1\\ 2x+my+z=-1 \end{array}\right.$$

Discuta el sistema segun los valores de $m\in\mathbb{R}$.

Solución:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m+1 & 2\\ 1 & m-1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right)$, $|A|=4-m^2=0\Longrightarrow m=\pm 2.$

- Si $m\in\mathbb{R}-\{0,\pm 2\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right)=$ $\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)\Longrightarrow$ Sistema incompatible
- Si $m=2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)=$ $\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-5F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Problema 1.3.5 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si es posible, $(A\cdot B^t)^{-1}$.

b) Compruebe que, $C^3=I$, donde es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

Solución:

a) $A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4\\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow (A\cdot B^t)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$

b) $C^3=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C^{16}=\left(C^3)\right)^5\cdot C=I^5\cdot C=C=\begin{pmatrix} -1 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 1.3.6 Resuelva el sistema matricial

$$\left\{\begin{array}{l} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\\ \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2X+4Y=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{array}\right. \text{sumando} \Longrightarrow$$

$$7Y=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=2Y+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.3.7 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) Discuta el sistema $AX=B$ segun los valores del parametro a.

b) Resuelva el sistema cuando $a=1$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{array}\right)$, $|A|=2a(a-1)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=1$.

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1=F_2 \\ F_2=F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+3F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2+F_1 \\ 2F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

.

b) $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+4z=2 \\ x-2z=-1 \\ -x+y+2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.3.8 Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0,90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.
Solución:
Sean x el nº de mascarillas quirúrgicas desechables, y al nº de mascarillas higiénicas y z el nº de mascarillas quirúrgicas reutilizables.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y+z}{3}=0,9 \\ 30x+20y+10z=56 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2,7 \\ 15x+10y+5z=28 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0,8 \text{ €} \\ y=1,3 \text{ €} \\ z=0,6 \text{ €} \end{array}\right.$$

Problema 1.3.9 Resuelva la ecuacion matricial $XA+XA^t=B$, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA+XA^t=B \Longrightarrow X(A+A^t)=B \Longrightarrow X=B(A+A^t)^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Asturias

1.4.1. Modelo de 2020

Problema 1.4.1 Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y+z=a \\ 2x+y+2z=2a \\ 2x+y+3z=3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right),\ |A|=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2.$$

$$|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3-3a=0 \Longrightarrow a=1$$

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A_4| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) = 2 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 1.4.2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) Su rango.

b) Si existe, una columna combinación lineal de las restantes.

c) Si existe, una fila combinación lineal de las restantes.

Solución:

a) $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

b) Por ser el rango 3 y tener cuatro columnas una de ellas debe de ser combinación de las otras. Por ejemplo: $C_2 = 0C_1 + 3C_3 + 0C_4 = 3C_3$.

c) Como el rango es 3 las tres filas son linealmente independientes. No se puede obtener una fila por combinación lineal de las otras.

1.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.4.3 Dado Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora?

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo.

Solución:
Sea x el precio del libro, y el precio de la calculadora y z el precio del estuche.

a)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=38 \text{ €} \\ y=19-\lambda \text{ €} \\ z=\lambda \text{ €} \end{array}\right.$$

El valor del libro es 38 € pero no podemos saber el valor de la calculadora.

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 0,5x+0,8y+0,75z=34 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 10x+16y+15z=680 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=38 \text{ €} \\ y=15 \text{ €} \\ z=4 \text{ €} \end{array}\right.$$

Problema 1.4.4 Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{ccc} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)$

a) Discute el rango de A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A\cdot X=B$?

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m=0$.

Solución:

a) $|A|=m^2-1=0 \Longrightarrow m=\pm 1$

- Si $m\neq \pm 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.
- Si $m=1 \Longrightarrow |A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right|=-1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.
- Si $m=-1 \Longrightarrow |A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{array}\right|=5\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$.

b) $\text{Dim}(A)=3\times 3$ y $\text{Dim}(B)=3\times 2$ luego la dimensión de X debe ser $\text{Dim}(X)=3\times 2$.

c) Para $m=0 \Longrightarrow |A|=-1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$A\cdot X=B \Longrightarrow X=A^{-1}B=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{array}\right)$$

1.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.4.5 Dado el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ (2-a)x+2y=1 \\ ax=a \end{array}\right. \quad a\in\mathbb{R}$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo cuando sea posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2-a & 2 & 1 \\ a & 0 & a \end{array} \right)$, $|A| = a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

b) $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \\ x = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Problema 1.4.6 Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{array} \right)$, $x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

b) Para $x = 1$, calcula su inversa.

Solución:

a) $\left| \begin{array}{ccc} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{array} \right| = \left[\begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} \right] = \left| \begin{array}{ccc} 0 & x+1 & x-2 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} x+1 & x-2 \\ x & 2-x \end{array} \right| =$

$\left[\begin{array}{c} F_1 + F_2 \\ F_2 \end{array} \right] = \left| \begin{array}{cc} 2x+1 & 0 \\ x & 2-x \end{array} \right| = (2x+1)(2-x) = -2x^2 + 3x + 2$

$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ y $x = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{1}{3}, 2 \right\}$.

b) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right)$

1.5. Cantabria

1.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.5.1 Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,y A^t denota traspuesta de A.

a) Despeja la matriz X en la igualdad dada.

b) Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

c) Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

d) Calcula X.

Solución:

a) Como $|A| = |A^t| = -2 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y $\exists \left(A^t\right)^{-1} \Longrightarrow AXA^t = B \Longrightarrow X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1}$

b) $|A| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\left(A^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$$

d) $X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

Problema 1.5.2 En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

a) Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:
Sean x el n$^{\underline{o}}$ de tanques, y el n$^{\underline{o}}$ de submarinos y z el n$^{\underline{o}}$ de aviones.

a)
$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ y = 2x \\ y + z = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 2x - y = 0 \\ y + z = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 41 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 41 \\ 0 & -7 & -10 & -82 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 7F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 41 \\ 0 & -5 & -5 & -41 \\ 0 & 0 & -3 & 12 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado.

b)
$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + 5z = 41 \\ 2x - y = 0 \\ y + z = 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 6 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

1.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.5.3 Considera el sistema de ecuaciones: $\left\{ \begin{array}{l} x + (1-t)y = t \\ (1+t)x - 3y = -t \end{array} \right.$ dependiente del parámetro t.

a) Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

b) Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

c) Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-t & t \\ 1+t & -3 & -t \end{array} \right)$, $|A| = t^2 - 4 = 0 \Longrightarrow t = \pm 2.$
Si $m \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única). Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} t & 1-t \\ -t & -3 \end{array} \right|}{|A|} = \frac{-t^2 - 2t}{t^2 - 4} = -\frac{t}{t-2}$$

$$y = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & t \\ 1+t & -t \end{array} \right|}{|A|} = \frac{-t^2 - 2t}{t^2 - 4} = -\frac{t}{t-2}$$

b) Si $t = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado} \Longrightarrow x + 3y = -2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 3\lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

c) Si $t = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.5.4 Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 1 & a \end{array} \right)$, $B = \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{array} \right)$, en donde a es un parámetro real.

a) Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

b) Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

c) Calcula X para $a = 1$.

Solución:

a) $AX - X = B \Longrightarrow (A-I)X = B \Longrightarrow (A-I)^{-1}B.$

b) $|A-I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a = 0 \Longrightarrow$ si $a=0$ $\nexists (A-I)^{-1} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene solución.

c) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

1.6. Castilla La Mancha

1.6.1. Modelo de 2020

Problema 1.6.1 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax + 2y = a^2 \\ -x + y + z = 5 \\ x - ay - z = -(4+a) \end{cases}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -(4+a) \end{array}\right)$, $|A| = a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0$. y $a = 1$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \longrightarrow F_3 \\ F_2 \\ F_3 \longrightarrow F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $a=1$:
$$\left\{\begin{array}{l} x+2y=1\\ -x+y+z=5\\ x-y-z=-5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=6-3\lambda\end{array}\right.$$

Problema 1.6.2 Dadas las matrices:
$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX-2B=C$.

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}$

b) $AX-2B=C \Longrightarrow X=A^{-1}(C+2B)=$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\right]=$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8\\ 4 & 5 & 10\\ -9 & -12 & -23\end{pmatrix}$$

1.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.6.3 Se pide:

a) Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1\\ y & z\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ conmute.

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4-F_2\end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1\\ 0 & 2 & a\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}=$
$-a\begin{vmatrix} a+1 & 1\\ 2 & a\end{vmatrix}=-a\left[a(a+1)-2\right]=-a(a^2+a-2)=0 \Longrightarrow a=0,\ a=-2$ y $a=1$.
Luego $\nexists A^{-1}\ \forall a\in\{-2,0,1\}$

b) $CD = DC \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = z+3 \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x-z = 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 1.6.4 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax - ay - z = a \\ ax - ay = a \\ ax + 2y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente es sistema anterior para a $a = 2$, si es posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = -a(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = 0$.

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) $k = 2$:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3/4 \\ y = -1/4 \\ z = 0 \end{cases}$$

1.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.6.5 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AX + I_3 = BC \Longrightarrow X = A^{-1}(BC - I_3) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.6.6 Se pide:

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -4$ y $a = 2$.

- Si $a \neq -4$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.7. Castilla León

1.7.1. Modelo de 2020

Problema 1.7.1 Se pide:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -2$ y $\lambda = 1$.

- Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Problema 1.7.2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se esta usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz.

Solución:

$$|MA| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ a+2b & 2a+5b \end{vmatrix} = b - a = 2$$

$$|M+B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{vmatrix} = -a + 2b + 1 = 3 \Longrightarrow -a + 2b = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a + b = 2 \\ -a + 2b = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

1.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.7.3 Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{ \begin{array}{l} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{array} \right.$.

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a.

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix}$, $|A| = a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución trivial $x = y = z = 0$)
- Si $a = -1$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $a = 1$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) $a = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.7.4 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a-3 & a-3 \end{pmatrix}$

a) Indique para que valores de a existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Si $a = 4$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre la matriz X que verifica que $B + XA = C$.

Solución:

a) $|A| = a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

b) Si $a = 4 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

$B + XA = C \Longrightarrow X = (C - B)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

1.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.7.5 Se pide:

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ.

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, $|A| = \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = 0$.

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $\lambda = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \longrightarrow F_2 \\ F_2 \longrightarrow F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 1.7.6 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$.

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de} A)$$

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible?

Solución:

a) $A^2 = A^t \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m(n+1) & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = m \\ m(n+1) = 0 \\ n^2 = n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = n = 0 \\ m = 0, \ n = 1 \end{cases}$$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \forall m \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{R} - \{0\}$

1.8. Cataluña

1.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.8.1 Considera el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resolver, si es posible, el sistema para el caso $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{array} \right); \quad |A| = k^2 - 6k - 40 = 0 \Longrightarrow k = -4, \ k = 10$$

- Si $k \neq -4$ y $k \neq 10 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 5F_2 + 4F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 14 & 56 & 216 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $k = 10$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $k = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 18 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 1.8.2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Obtener la matriz X que satisfaga la ecuación $AX = I - 3X$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Comprobar que X es invertible y calcular su inversa.

Solución:

a) $AX = I - 3X \Longrightarrow AX + 3X = I \Longrightarrow (A + 3I)X = I \Longrightarrow X = (A + 3I)^{-1}$

$$X = (A + 3I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

b) $|X| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

1.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.8.3 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Estudiar el rango de A para los diferentes valores del parámetro real a.

b) Comprobar que para $a = 4$ la matriz A es invertible y se verifica $A^{-1} = A^2$.

Solución:

a) $|A| = -a^2 + 8a - 15 = 0 \Longrightarrow a = 5$ y $a = 3$.

- Si $a \neq 5$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $a = 3 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ $\text{Rango}(A) = 2$.
- Si $a = 5 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ $\text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $a=4 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $A^{-1}=A^2$

1.9. Comunidad Valenciana

1.9.1. Modelo de 2020

Problema 1.9.1 Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=\alpha+1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado.

b) La solución del sistema cuando $\alpha=-1$.

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique $x+y+z=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)$, $|A|=-1\neq 0\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $\alpha=-1 \Longrightarrow \begin{cases} 2x+3z=-1 \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases}$

c) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ 2F_2-F_1 \\ 2F_3-3F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & 1 & 10-\alpha \\ 0 & -2 & 1 & -\alpha+2 \end{array}\right)=$
$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & -4 & 1 & 10-\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha-6 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x=9+2\alpha \\ y=-4 \\ z=-6-\alpha \end{cases}$

Como $x+y+z=0 \Longrightarrow (9+2\alpha)+(-4)+(-6-\alpha)=0 \Longrightarrow \alpha=1 \Longrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=-4 \\ z=-7 \end{cases}$

Problema 1.9.2 Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX=\alpha X$ sólo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$.

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $AX = \alpha X \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x + 4y = \alpha x \\ -x + 6y = \alpha y \end{array}\right. \Longrightarrow,$

$$\left\{\begin{array}{r} (1-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (6-\alpha)y = 0 \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema homogéneo.
$\begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = a^2 - 7a + 10 = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $a = 5$.
El sistema tiene solución única para cualquier valor real a distinto de $a = 2$ y $a = 5$. ($\forall a \in \mathbb{R} - \{2, 5\}$).

b) Si $\alpha = 5$:

$$\left\{\begin{array}{r} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right.$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$
$2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow AX = 2X.$
Ahora tenemos
$AX = 2X,$
$A^2X = AAX = 2AX = 2^2X,$
$A^3X = AA^2X = A2^2X = 2^3X,$
$A^4X = AA^3X = A2^3X = 2^4X, \cdots\cdots\cdots, A^{100}X = 2^{100}X \Longrightarrow \beta = 2^{100}.$

1.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.9.3 Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{array}\right.$, siendo a un parámetro real, obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El estudio del sistema en función del parámetro a.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$.

c) La solución del sistema cuando $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$, $|A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = 1$.

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3+2F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Luego el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Luego el sistema es incompatible.

b) $a=-2$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=1\\ x-2y+z=1\\ -2x+y+z=-2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

c) $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1\\ x+z=1\\ y+z=-2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=-1\\ z=-1\end{array}\right.$$

Problema 1.9.4 Se dan las matrices $A=\left(\begin{array}{rr} 1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{array}\right)$, y $B=\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{array}\right)$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

c) La inversa de A^TA, cuando dicha inversa exista.

Solución:

a) $|AB|=\left|\left(\begin{array}{rr} 1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{array}\right)\right|=\left|\begin{array}{rrr} -3 & 2b & 0\\ -b & 0 & 2b\\ -1 & 2b & -4\end{array}\right|=0\Longrightarrow\nexists(AB)^{-1}\ \forall b\in\mathbb{R}.$

$|BA|=\left|\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 2\\ -1 & b & -1\end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{array}\right)\right|=\left|\begin{array}{rr} -3 & 2\\ b^2 & -4\end{array}\right|=-2(b^2-6)=0\Longrightarrow$

$b=\pm\sqrt{6}\Longrightarrow\exists(AB)^{-1}\ \forall b\in\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{6}\right\}.$

b) $|A^TA|=\left|\left(\begin{array}{rrr} 1 & b & -1\\ 2 & 0 & 2\end{array}\right)\left(\begin{array}{rr} 1 & 2\\ b & 0\\ -1 & 2\end{array}\right)\right|=\left|\begin{array}{cc} b^2+2 & 0\\ 0 & 8\end{array}\right|=8(b^2+2)\neq 0\Longrightarrow$

$\exists(A^TA)^{-1}\ \forall b\in\mathbb{R}.$

c) $A^TA = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ & \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$

1.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.9.5 Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-3y+az=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

b) La solución del sistema cuando $a=0$.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$, $|A| = a^2-3a+2=0 \Longrightarrow a=1$ y $a=2$.

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3-F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) $a=0$:

$$\begin{cases} x+2z=3 \\ x-3y=-2 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-3 \\ z=7 \end{cases}$$

c) $a=2$:

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x-3y+2z=-2 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Problema 1.9.6 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad.

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema.

Solución:

a) $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \Longrightarrow A(A^2 - 3A + 3I) = I \Longrightarrow A^{-1} = A^2 - 3A + 3I \Longrightarrow a = -3$ y $b = 3$. Bastaría comprobar que $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

$$A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)x + 2y \\ (1-\lambda)y \\ 2y + (1-\lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se trata de un sistema homogéneo

$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - \lambda I| = (1-\lambda)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$

- Si $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A - \lambda I| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A - \lambda I) = 3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado cuya solución única es la trivial $x = y = z = 0$.
- Si $\lambda = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ y el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)
$\begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = l \end{cases}$

1.10. Extremadura

1.10.1. Modelo de 2020

Problema 1.10.1 Se pide:

a) Estudie el siguiente sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

b) Resuelva es sistema, si es posible, para el valor $a = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)$, $|A| = a^3 + a^2 - a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$.

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 4y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 10/3 \\ y = -1 \\ z = -5/3 \end{cases}$$

Problema 1.10.2 Resuelva la ecuación matricial $AX - A = I - AX$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$AX - A = I - AX \Longrightarrow 2AX = I + A \Longrightarrow X = (2A)^{-1}(I + A) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.10.3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa.

b) Calcule la inversa para $k = 1$.

Solución:

a) $|A| = k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = -1$ y $k = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1} \ \ \forall k \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) Si $k = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 1.10.4 Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + \lambda y - z = 1 \\ -\lambda x + y = \lambda \\ (\lambda + 3)y - 2z = 4 \end{cases}$$

Solución:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & (\lambda+3) & -2 & 4 \end{array}\right)$, $|A| = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

1.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.10.5 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los productos de matrices AB y BA. ¿Se cumple que $AB = BA$?

b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB \neq BA$

b) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Para que se cumpla la igualdad del enunciado es necesario que $AB = -BA$, por el apartado anterior no es cierto, luego la igualdad en cuestión no se cumple.

Problema 1.10.6 Se pide:

a) Estudie en función del parámetro λ el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x + \lambda z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ \lambda x - y + z = 1 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 1 - \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1.$

- Si $\lambda \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única). Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

1.11. Galicia

1.11.1. Modelo de 2020

Problema 1.11.1 Se pide:

a) Suponiendo que A e X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeje X en la ecuación $A-X=AX$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule X tal que $A-X=AX$.

Solución:

a) $A-X=AX \Longrightarrow AX+X=A \Longrightarrow (A+I)X=A \Longrightarrow X=(A+I)^{-1}A$.

b) $X=(A+I)^{-1}A = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

Problema 1.11.2 Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$$

Solución:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right)$, $|A| = 2m(m-3) = 0 \Longrightarrow m=0$ y $m=3$.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

1.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.11.3 Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2 . (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A-B)(A+B)$)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

a) $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) $XA+(A+B)^T=2I+XB\Longrightarrow XA-XB=2I-(A+B)^T\Longrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T\Longrightarrow$ $X=\left[2I-(A+B)^T\right](A-B)^{-1}$

$$X=\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T\right]\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right]\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.11.4 Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} mx+y=2m \\ x+z=0 \\ x+my=0 \end{array}\right.$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

Solución:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 2m \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & 0 \end{array}\right)$, $|A|=1-m^2=0\Longrightarrow m=\pm1$.

- Si $m\neq\pm1\Longrightarrow|A|\neq0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$ Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

1.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.11.5 Para la ecuacion matricial $A^2X+AB=B$, se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

Solución:

a) $A^2X+AB=B\Longrightarrow A^2X=B-AB\Longrightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}(B-AB)$
Tendríamos $\dim(A)=4\times 4\Longrightarrow\dim(B)=4\times 3\Longrightarrow\dim(B-AB)=4\times 3$.
Por otro lado $\dim(A)=4\times 4\Longrightarrow\dim(A^2)=4\times 4\Longrightarrow\dim\left(\left(A^2\right)^{-1}\right)=4\times 4$
Luego $\dim(X)=4\times 3$

b) $X=\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}^2\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}\right]$
$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 10\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -10\end{pmatrix}\right]=$
$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
Lo hacemos de otra manera más simple. Observamos que $B=-A$ y sustituimos este dato en la ecuación y nos queda:
$X=\left(A^2\right)^{-1}(B-AB)=\left(A^2\right)^{-1}(-A+A^2)=-\left(A^2\right)^{-1}A+\left(A^2\right)^{-1}A^2=-(AA)^{-1}A+I=$
$-A^{-1}A^{-1}A+I=-A^{-1}+I$

$$X=-A^{-1}+I=-\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Problema 1.11.6 Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (m+3)x-m^2y=3m\\ (m+3)x+my=3m+6\end{cases}$$

Solución:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} m+3 & -m^2 & 3m\\ m+3 & m & 3m+6\end{array}\right)$, $|A|=m(m+1)(m+3)=0\Longrightarrow m=0$, $m=-1$ y $m=-3$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1, -3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$
- Si $m = -1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$
- Si $m = -3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Sistema compatible indeterminado

1.12. Islas Baleares

1.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 1.12.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + (1-a)y + az = a + 1 \end{cases}$$

Determina el parámetro real a, siempre que sea posible, de manera que el sitema:

a) Tenga solución única.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) No tenga solución.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-a & a & a+1 \end{array}\right), \ |A| = -a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ y } a = 1.$$

a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

b) Si $a = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

Problema 1.12.2 Una empresa tiene tres minas: A, B y C, y en cada una, el mineral extraído contiene los elementos químicos: níquel (Ni), cobre (Cu) y hierro (Fe), en diferente concentración. Las concentraciones son:

- Mina A: Ni (1 %), Cu (2 %), Fe (3 %),
- Mina B: Ni (2 %), Cu (5 %), Fe (7 %),
- Mina C: Ni (1 %), Cu (3 %), Fe (1 %).

Para obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro en total, ¿cuántas toneladas de mineral se han de extraer de cada mina?

a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:
Sea x el nº de toneladas extraídas en la mina A, y el nº de toneladas extraídas en la mina B y z el nº de toneladas extraídas en la mina C.

a)

	Ni	Cu	Fe
A	$0,01x$	$0,02x$	$0,03x$
B	$0,02y$	$0,05y$	$0,07y$
C	$0,01z$	$0,03z$	$0,01z$
	7	18	16

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0,01x + 0,02y + 0,01z = 7 \\ 0,02x + 0,05y + 0,03z = 18 \\ 0,03x + 0,07y + 0,01z = 16 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{array}\right.$$

b) $|A| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right| = -3 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

c)

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1800 \\ 3x + 7y + z = 1600 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 200 \\ y = 100 \\ z = 300 \end{array}\right.$$

1.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.12.3 Dada la ecuación matricial $MX + N = P$, donde X es la matriz incógnita y $M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores del parámetro real a existe la inversa de M?

b) Calcula la matriz inversa de M.

c) Para $a = 2$ resuelve la ecuación matricial, si es posible.

d) Con los valores de a, para los que existe la matriz inversa de M, resolver la ecuación matricial.

Solución:

a) $|M| = -a^2 - a = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1 \Longrightarrow \exists M^{-1} \;\; \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

b) $M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \dfrac{1}{a(a+1)} \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

c) $MX + N = P \Longrightarrow MX = P - N \Longrightarrow X = M^{-1}(P - N)$

$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$X = \frac{1}{a(a+1)}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{a(a+1)}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{2}{a+1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

Problema 1.12.4 Sean las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula AB y $(AB)^t$, donde la "t" indica traspuesta.

b) ¿Es posible calcular B^2? Si lo es calcúlala.

c) Calcula el rango de A para los diferentes valores del parámetro x.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$

$(AB)^t = \begin{pmatrix} x+2 & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no se pueden multiplicar, el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda.

c) $|A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3$.

Cogemos el menor de orden dos $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 4$.

- Si $x \neq 4 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & x \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- Si $x = 4 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ donde $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = 3F_1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$.

1.13. Islas Canarias

1.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.13.1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.

b) Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $AX = 24I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = k^3 - 6k^2 + 5k = 0 \Longrightarrow k = 0$, $k = 1$ y $k = 5 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 5\}$.

b) Si $k = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AX = 24I_3 \Longrightarrow X = A^{-1}24I_3 = 24A^{-1} = -\frac{24}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Problema 1.13.2 Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes. Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto?

Solución:

Sea x el número de cajas de bombones, y el número de tabletas de chocolate y z el número de paquetes de chocolate en polvo.

	Chocolate	leche
bombones	2	6
tabletas	4	4
chocolate	1	4
existencias	24	60

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \\ z=4 \end{array}\right.$$

1.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.13.3 Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$

Se plantea la siguiente ecuacion matricial: $XA - C^t = XB$

a) Justifique razonadamente cuál es la dimensión de la matriz X.

b) Halle la matriz X que cumple la ecuación.

Solución:

a) $XA - C^t = XB \Longrightarrow XA - XB = C^t \Longrightarrow X(A-B) = C^t \Longrightarrow X = C^t(A-B)^{-1}$.
Tenemos que $\dim(C^t) = 2 \times 3$ y $\dim(A-B)^{-1} = 3 \times 3 \Longrightarrow \dim(X) = 2 \times 3$.
Se pueden multiplicar porque el número de columnas de C^t es igual al número de filas de $(A-B)^{-1}$, que es 3, y se obtiene una matriz X con el número de filas de la matriz C^t, que es 2, y número de columnas de la matriz $(A-B)^{-1}$, que es 3. Es decir, $\dim(X) = 2 \times 3$

b) $$X = C^t(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 10 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 10 & -3 & 4 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 1.13.4 Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A = \left\{\begin{array}{l} kx+2y+6z=0 \\ 2x+ky+4z=2 \\ 2x+ky+6z=k-2 \end{array}\right.$$

; se pide:

a) Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

b) Resuelva el sistema para $k=0$.

Solución:

a) $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 6 & 0 \\ 2 & k & 4 & 2 \\ 2 & k & 6 & k-2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2(k^2-4) = 0 \Longrightarrow k = \pm 2. \text{ Luego}$$

- Si $k \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A} =$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

- Si $k=2$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 6 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema compatible indeterminado.
- Si $k=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2\\ 2 & -2 & 6 & -4\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 10 & 2\\ 0 & 0 & 12 & -4\end{array}\right)\Longrightarrow$
Luego se trata de un sistema incompatible.

b) Si $k=0$: $\left\{\begin{array}{l} 2y+6z=0\\ 2x+4z=2\\ 2x+6z=-2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5\\ y=6\\ z=-2\end{array}\right.$

1.14. La Rioja

1.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.14.1 Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)$, $m\in\mathbb{R}-\{0\}$.

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2=\alpha A+\beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

Solución:

a) $A^2=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4m & 0 & 4\end{array}\right)=2A$

$A^2=\alpha A+\beta I=\alpha\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)+\beta\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4m & 0 & 4\end{array}\right)=$
$\beta\left(\begin{array}{ccc} 2a+b & 0 & 0\\ 0 & 2a+b & 0\\ am & 0 & 2a+b\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 4m & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2a+b=4\\ am=4m\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=4\\ b=-4\end{array}\right.\Longrightarrow$
$A^2=4A-4I$.

b) $A^5=AA^2A^2=A(4A-4I)(4A-4I)=A(16A^2-16A-16A+16I)=16A(A^2-2A+I)=16A[(4A-4I)-2A+I]=16A(2A-3I)=16(2A^2-3A)=16[2(4A-4I)-3A]=16(5A-8I)$

$$A^5=16\left[5\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ m & 0 & 2\end{array}\right)-8\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{ccc} 32 & 0 & 0\\ 0 & 32 & 0\\ 80m & 0 & 32\end{array}\right)$$

Problema 1.14.2 Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} ay+(a+1)z=a\\ ax+z=a\\ x+az=-a\end{array}\right.$.

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para a $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a+1 & a\\ a & 0 & 1 & a\\ 1 & 0 & a & -a \end{array}\right);\quad |A|=a-a^3=0,\ \ a=0,\ \ a=\pm 1$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
  Resolvemos por Cramer:
  $$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a & a & a+1\\ a & 0 & 1\\ -a & 0 & a\end{array}\right|}{a-a^3}=\frac{a}{a-1}$$
  $$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 0 & a & a+1\\ a & a & 1\\ 1 & -a & a\end{array}\right|}{a-a^3}=\frac{2a}{a-1}$$
  $$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 0 & a & a\\ a & 0 & a\\ 1 & 0 & -a\end{array}\right|}{a-a^3}=-\frac{a}{a-1}$$
- Si $a=-1$:
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$
  sistema compatible indeterminado
  $$\left\{\begin{array}{l} -y=-1\\ -x+z=-1\\ x-z=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=1\\ z=\lambda\end{array}\right.$$
- Si $a=1$:
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$
  En este caso el sistema no tiene solución.
- Si $a=0$:
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$
  sistema compatible indeterminado
  $$\left\{\begin{array}{l} z=0\\ z=0\\ x=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right..$$

b) Si $a=2 \Longrightarrow A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$

Problema 1.14.3 Sean A y B las matrices: $A=\left(\begin{array}{cc} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{array}\right)$

a) Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 3X-5Y=A \\ -X+2Y=B \end{array}\right.$$

b) Calcular si existen las matrices inversa de X e Y.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} 3X-5Y=A \\ -X+2Y=B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=2A+5B=2\left(\begin{array}{cc} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{array}\right)+5\left(\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \\ \\ Y=A+3B=\left(\begin{array}{cc} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{array}\right)+3\left(\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{array}\right) \end{array}\right.$$

b) $|X|=0 \Longrightarrow \nexists X^{-1}$
$|Y|=o \Longrightarrow \nexists Y^{-1}$

1.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.14.4 Discutir y resolver según el valor del parámetro real a, el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{l} (a-1)x+y+3az=1 \\ ax+ay-z=a \\ (a-1)x+y+(a-1)z=-2a+1 \end{array}\right.$.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & 1 & 3a & 1 \\ a & a & -1 & a \\ a-1 & 1 & a-1 & -2a+1 \end{array}\right); \quad |A|=-2a^3+3a^2+2a=0, \ \ a=0, \ a=2, \ a=-\frac{1}{2}$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\left\{0,2,-\frac{1}{2}\right\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
  Resolvemos por Cramer:
  $$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ -2a+1 & 1 & a-1 \end{array}\right|}{-2a^3+3a^2+2a}=-\frac{2(3a^2+1)}{2a^2-3a-2}$$
  $$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a-1 & 1 & 3a \\ a & a & -1 \\ a-1 & -2a+1 & a-1 \end{array}\right|}{-2a^3+3a^2+2a}=\frac{8a^2-a-4}{2a^2-3a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a-1 & 1 & -2a+1 \end{vmatrix}}{-2a^3+3a^2+2a} = \frac{2a}{2a+1}$$

- Si $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & +1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y=1 \\ -z=0 \\ -x+y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right.$$

- Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 13F_3 - 5F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -52 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

- Si $a = -1/2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3/2 & 1 & -3/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -3/2 & 1 & -3/2 & 2 \end{array}\right) = -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible}$$

En este caso el sistema no tiene solución.

Problema 1.14.5 Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - xF_1 \\ F_3 - xF_2 \\ F_4 - xF_3 \end{array}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-yx & z^2-zx & t^2-tx \\ 0 & y^3-y^2x & z^3-z^2x & t^3-t^2x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y^2-yx & z^2-zx & t^2-tx \\ y^3-y^2x & z^3-z^2x & t^3-tx \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-yF_1 \\ F_3-yF_2 \end{bmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-y^2 & t^2-y^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)\begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z^2-y^2 & t^2-y^2 \end{vmatrix} =$$

$$(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z+y & t+y \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

Problema 1.14.6 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.
Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3m & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ nm & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.15. Madrid

1.15.1. Modelo de 2020

Problema 1.15.1 Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Solución:

a) Se necesitan: de nitrógeno $2000 \cdot 0,78 = 1560$ l, de oxígeno $2000 \cdot 0,21 = 420$ l y de argón $2000 \cdot 0,01 = 20$ l.

b) Se x el nº litros de mezcla A, y el nº litros de mezcla B y z el nº litros de mezcla C.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}\right.$$

Problema 1.15.2 Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Solución:

a) Por Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Si $t = 0$ el Rango$(A) = 1$ y si $t \neq 0$ el Rango$(A) = 2$.

b) El sistema es compatible determinado si Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$= 2 \Longrightarrow t \neq 0$ por el apartado anterior. Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

1.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.15.3 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$; $|A| = a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 1.15.4 Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.
Solución:
Sea x el precio del kg de doradas, y el precio del kg de lubinas y z el precio del kg de rodaballos.

$$\begin{cases} 1374000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = 0,11 + y \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5,7767 \text{ euros/kg} \\ y = 5,6667 \text{ euros/kg} \\ z = 8,5945 \text{ euros/kg} \end{cases}$$

1.15.3. Convocatoria Ordinaria junio (coincidente) de 2020

Problema 1.15.5 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases},$$

se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) Resolver el sistema para $k = -3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{array}\right); \quad |A| = k^2 - 4 = 0 \Longrightarrow k = \pm 2$$

- Si $k \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left[\ F_1 = F_2\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $k = -3$:

$$\begin{cases} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Problema 1.15.6 Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

a) Calcular el determinante de A.

b) Calcular BCB^{-1}.

c) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|AB| = |BC| \Longrightarrow |A||B| = |B||C| \Longrightarrow |A| = |C| = 6$

b)

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.15.7 Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución:

Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

a) Hacemos $F_3 = 5F_1 - F_2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Hacemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ con $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ las tres filas son linealmente independientes.

c) Tomamos la matriz anterior y tenemos:
$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $|A_1| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A_1) = 3 = \text{Rango}(A) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible determinado.

d) Tomamos la matriz del primer apartado: (Por Gauss)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

e) A la matriz anterior le cambiamos el último valor de la tercera fila: (Por Gauss)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

Problema 1.15.8 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $BB^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|BB^t| = 0 \Longrightarrow |D| = |ABB^t| = |A||BB^t| = 0$

1.16. Murcia

1.16.1. Modelo de 2020

Problema 1.16.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = a + 3 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a+3 \end{array}\right); \quad |A| = -a^3 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \;\; a = -2$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.16.2 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$

c) Determine si existe la inversa de A . En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

c) $|A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.16.3 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2y - z = 3 - a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 0$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a^3 + a^2 - a - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

b) Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4\\ x+y-z=4\\ x-y-z=1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2}+\lambda\\ \\ y=\dfrac{3}{2}\\ \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c) Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Problema 1.16.4 Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & -3\\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) Resuelva la ecuacion matricial $AXB=A^t-3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $|A|=-1\Longrightarrow\exists A^{-1}\Longrightarrow A$ es regular.$\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$|B|=1\Longrightarrow\exists B^{-1}\Longrightarrow B$ es regular.$\Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $AXB=A^t-3B\Longrightarrow X=A^{-1}(A^t-3B)B^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & -9\\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8\\ 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 28 & 38\\ -18 & -23 \end{pmatrix}$$

1.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.16.5 Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2\\ x-ay+a^2z=-1\\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{array}\right.$$

a) Comprueba que el sistema nunca tiene solución única.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3 \ \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Luego el sistema no puede ser compatible determinado.

b) Tomamos otro menor de orden 3 de $\overline{A}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = 0 \Longrightarrow$ $a = -1 \ \ a = 2$

- Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\text{sistema incompatible}$$

- Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & -8 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ -2x + 4y - 8z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.16.6 Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6,

b) Calcule A^{2020}

c) Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^6 = A^5A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{2020} = \left(A^6\right)^{336} A^4 = I^{336} \cdot A^4 = A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $|A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

1.17. Navarra

1.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.17.1 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3-a \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{array}\right); \quad |A| = a(a+1)(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = \pm 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única) Por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a^2+a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 3-a & a & a^2-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a^2(a^2-1)}{a(a+1)(a^2-1)} = -\frac{2a}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 2 & 0 \\ -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-a & a^2-1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2(a+1)(a^2-1)}{a(a+1)(a^2-1)} = \frac{2}{a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a(a^2-1)}{a(a+1)(a^2-1)} = -\frac{1}{a+1}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y = 2 \\ -2x - y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.17.2 Sean A y B dos matrices de tamano 3 tales que $|A| = |B| = \dfrac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C = (2A^t B^{-1})^2$$

Solución:

$$|C| = \left|(2A^t B^{-1})^2\right| = \left|2A^t B^{-1}\right|^2 = (|2A^t||B^{-1}|)^2 = \left(2^3|A|\frac{1}{|B|}\right)^2 = \left(2^3\frac{|A|}{|A|}\right)^2 = \left(2^3\right)^2 = 2^6 = 64$$

1.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 1.17.3 Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\left\{\begin{array}{l} (a^2 - 2)x + 2y + z = a + 2 \\ (a^2 - 2)x + 4y + (a + 1)z = a + 6 \\ (a^2 - 2)x + 2y + (2 - a)z = a + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2 - 2 & 2 & 1 & a + 2 \\ a^2 - 2 & 4 & a + 1 & a + 6 \\ a^2 - 2 & 2 & 2 - a & a + \sqrt{2} \end{array}\right); \quad |A| = 2(1 - a)(a^2 - 2) = 0 \Longrightarrow a = 1, \quad a = \pm\sqrt{2}$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq 0$ y $a\neq\pm\sqrt{2}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-2 & 2 & 1 & a+2\\ a^2-2 & 4 & a+1 & a+6\\ a^2-2 & 2 & 2-a & a+\sqrt{2}\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} a^2-2 & 2 & 1 & a+2\\ 0 & 2 & a & 4\\ 0 & 0 & 1-a & -2+\sqrt{2}\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}\\[2ex] y=\dfrac{a(2+\sqrt{2})-4}{2(a-1)}\\[2ex] z=\dfrac{2-\sqrt{2}}{a-1}\end{array}\right.$$

- Si $a=\sqrt{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & \sqrt{2}+2\\ 0 & 4 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+6\\ 0 & 2 & 2-\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2}\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2y+z=2+\sqrt{2}\\ (\sqrt{2}-1)z=2-\sqrt{2}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=1\\ z=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

- Si $a=-\sqrt{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2\\ 0 & 4 & -\sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}+6\\ 0 & 2 & 2+\sqrt{2} & 0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & \sqrt{2}+1 & -2+\sqrt{2}\end{array}\right)$$

$$=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -\sqrt{2}+2\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 2+\sqrt{2}\\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2}\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 2 & 7\\ -1 & 2 & 1 & 1+\sqrt{2}\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -2+\sqrt{2}\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Problema 1.17.4 Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\left(\begin{array}{cc} 2 & -1\\ -1 & 1\end{array}\right)$ y la inversa de la matriz $AB=\left(\begin{array}{cc} -6 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right)$ determina la matriz B.

Solución:
Sea $C = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Longrightarrow CA = B^{-1}A^{-1}A \Longrightarrow CA = B^{-1} \Longrightarrow B = \left(B^{-1}\right)^{-1} = (CA)^{-1} = A^{-1}C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

1.18. País Vasco

1.18.1. Modelo de 2020

Problema 1.18.1 Discutir, en función de m, el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x + mz = m-2 \\ -y + z = m-3 \end{array}\right.$$

Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{array}\right); \quad |A| = m(m-3) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 3$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $m = 3$: (sistema compatible indeterminado)

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} - \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.18.2 Dada la matriz $A(a)$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4.

Solución:

$$|A(a)^2| = |A(a)|^2 = a^2 = 4 \Longrightarrow a = \pm 2$$

1.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 1.18.3 Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right); \quad |A| = -2a^2 + 3a + 9 = 0 \Longrightarrow a = 3, \ \ a = -\frac{3}{2}$$

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -3/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{23 - 3a}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{3a - 23}{2a^2 - 3a - 9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2 + a + 2}{-2a^2 + 3a + 9} = -\frac{a^2 + a + 2}{2a^2 - 3a - 9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{10 - 8a}{-2a^2 + 3a + 9} = -\frac{2(4a - 5)}{2a^2 - 3a - 9}$$

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 3F_2 - F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + 7F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = -3/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3/2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3/2 & 3 \end{array} \right) = \frac{3}{2} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 + 2F_1 \\ 3F_3 + 2F_1 \end{array} \right] =$$

$$\frac{3}{2} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -16 & 2 & 14 \\ 0 & 8 & -1 & 20 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array} \right] = \frac{3}{2} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -16 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

Problema 1.18.4 Sea $M(\alpha)$ la matriz dada por $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$

a) Determinar para que valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por que no es posible.

Solución:

a) $|M(\alpha)| = 1 - \alpha^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm 1$ para estos valores no existe la inversa de $M(\alpha)$.

$$\nexists M(\alpha)^{-1} \ \ \forall \alpha \in \{-1, 1\}$$

$$\exists M(\alpha)^{-1} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

b) Si $\alpha = 0 \Longrightarrow M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 1.18.5 Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2A \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 4x + 4y + Az = 4A \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overline{S} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & A & 4A \end{array} \right); \ \ |S| = A - 4 = 0 \Longrightarrow A = 4$$

- Si $A \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2A & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4A & 4 & A \end{vmatrix}}{|S|} = \frac{2(3A^2 - 15A + 4)}{A - 4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2A & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4A & A \end{vmatrix}}{|S|}=-\frac{2(2A^2-13A+4)}{A-4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4A \end{vmatrix}}{|S|}=-\frac{4A}{A-4}$$

- Si $A=4$:

$$\overline{S}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 16 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{array}\right)=$$

$$\Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Problema 1.18.6 Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}

Solución:

$$M^1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad M^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3=M^2M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4=M^3M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $M^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow M^{2020}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$

Capítulo 2

Geometría

2.1. Resúmenes teóricos

Vectores

Sean $\overrightarrow{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\overrightarrow{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\overrightarrow{w}=(w_1,w_2,w_3)$

- $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

- Producto escalar: $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos\alpha \end{array} \right.$

- Producto vectorial: $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha$.
  $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\dfrac{1}{2}S$)

- Producto mixto: $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V=S_{\text{base}}\cdot$Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}}=\frac{1}{3}S_{\text{base}}\cdot$ Altura

Ecuaciones

Sea la recta $r:\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(u_1,u_2,u_3) \\ P_r(a,b,c) \end{array} \right.$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x}=P_r+\lambda\overrightarrow{u_r}$	$\left\{ \begin{array}{l} x=a+\lambda u_1 \\ y=b+\lambda u_2 \\ z=c+\lambda u_3 \end{array} \right.$	$\dfrac{x-a}{u_1}=\dfrac{y-b}{u_2}=\dfrac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ P(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ y $P_3(a_3, b_3, c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$.

  Si Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.

  Si Rango$(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.

  Si Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.

- De una recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:

  a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.

  b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)

  c) No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)

- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:

  a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.

  b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.

  c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ y $\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P,\pi) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$
- Punto medio de P y Q es $A = \dfrac{P+Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- Esfera: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio$= r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π:
  - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$
- Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

- Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$
donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

- Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos
$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \text{ o } P \end{cases} , \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \text{ o } P \end{cases}$$

- Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P:
  - Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
  - Calculo P' punto de corte de π' y t.
  - La recta buscada es la que une los puntos P y P'.

- Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).

- Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

- Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.

- Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

- Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

2.2. Andalucía

2.2.1. Modelo de 2020

Problema 2.2.1 Considera la recta $r: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1: x = 0$ y $\pi_2: y = 0$.

a) Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.

b) Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,3,1) \\ P_r(2,2,1) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Longrightarrow P(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda)$

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Longrightarrow |2-\lambda| = |2+3\lambda| \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2-\lambda = 2+3\lambda \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow P_1(2,2,1) \\ 2-\lambda = -2-3\lambda \Longrightarrow \lambda = -2 \Longrightarrow P(4,-4,-1) \end{cases}$$

b) $t: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,0,1) \\ P_t(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_r} = (2,2,1)$

$[\overrightarrow{P_tP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t}] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Longrightarrow r$ y t se cruzan.

Problema 2.2.2 Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.

b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (0,-1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,1,1)$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} | = \frac{1}{2}|(-3,-2,-1)| = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-1+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15} \Longrightarrow \alpha = 7502'13''$$

2.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.2.3 Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r: x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a.

b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, a) \\ P_r(1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{array} \right. , s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-a, -1, 2) \\ P_s(3, 3, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - a\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{array} \right.$

y $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, 1, -2)$

$|A| = [\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_t}] = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \end{array} \right| = -a^2 + 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2.$

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.
- Si $a = -2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$ y Rango$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right)$ =Rango$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.
- Si $a = 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$ y Rango$\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right)$ =Rango$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Calculamos el punto P de corte entre r y s:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow P(1, 2, 1)$$

La recta $t \perp r$ y $s \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array} \right| = (4, -6, 1)$

$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (4, -6, 1) \\ P_t(1, 2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$

Problema 2.2.4 Se considera el punto $A(1, -2, 0)$y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{array} \right.$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 3, 1) \\ P_r(2, -2, 0) \end{array} \right.$

$\pi \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + \alpha = 0$, como $A \in \pi \Longrightarrow -3 - 6 + 0 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 9 \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + 9 = 0 \Longrightarrow \pi : 3x - 3y - z - 9 = 0$

b) $\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 3, 1) \\ \overrightarrow{AP_r} = (1, 0, 0) \\ A(1, -2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x - 1 & y + 2 & z \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : y - 3z + 2 = 0$

2.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.2.5 Considera el plano $\pi : x - y + az = 0$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right.$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r.

b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 5\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (5, 8, 1) \\ P_r(-2, -3, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, a)$$

a) $\pi \parallel r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow 5 - 8 + a = 0 \Longrightarrow a = 3$

b) $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (5, 8, 1) \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z + \alpha = 0$. Como $P \in \pi' \Longrightarrow \pi' : 5 + 16 + 3 + \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = -24 \Longrightarrow \pi' : 5x + 8y + z - 24 = 0$

Problema 2.2.6 Considera el plano $\pi : x - y + z = 2$ y la recta $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y + 1}{1} = \dfrac{z + 2}{-1}$.

a) Calcula la distancia entre r y π.

b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 1)$

$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 2 - 1 - 1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow r \parallel \pi$

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

b) $\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 1)\overrightarrow{u_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(0, -1, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x & y + 1 & z + 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : y + z + 3 = 0$

2.3. Aragón

2.3.1. Modelo de 2020

Problema 2.3.1 Se pide:

a) Determine el valor de la constante real m para que los cuatro puntos siguientes:

$$A(1, 1, 0), \;\; B(1, 3, 1), \;\; C(2, 1, -1), \;\; D(1, m, m)$$

sean coplanarios, es decir, estén en un mismo plano.

b) Determine el área del triángulo que definen los puntos A, B y C.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(0,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{AD}=(0,m-1,m)$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & m-1 & m\end{vmatrix}=-m-1=0\Longrightarrow m=-1$$

b)

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(-2,1,-2)|=\frac{1}{2}\sqrt{9}=\frac{3}{2}\ u^2$$

Problema 2.3.2 Determine la ecuación del plano π que contiene a las dos rectas r y s siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-2y=-4\\ 3x+2z=4\end{array}\right. \qquad s: x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

Solución:
El problema no tiene sentido si las dos rectas se cruzan o coinciden. Estudiamos su posición relativa.

$$r:\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+4z=1\\ 3x-2y+z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-4+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=8-3\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-3)\\ P_r(-4,0,8)\end{array}\right.$$

$$s: x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,2,-1)\\ P_s(0,-1,1)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_sP_r}=(-4,0,8)-(0,-1,1)=(-4,1,7)$$

$\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_sP_r}\right]=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 7\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$ y Rango$(A)=2$ y Rango$\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}$ =Rango$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}=$ $2\Longrightarrow r$ y s se cortan.
La ecuación del plano π que contiene a las dos rectas sería:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-3)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,-1)\\ P_s(0,-1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi: 5x-y+3z-4=0$$

2.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.3.3 Se considera la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+z=1\\ 2x+y=3\end{array}\right.$

a) Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

b) Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$. Sabiendo que $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x+z=1 \\ 2x+y=3 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,2,1) \\ P_r(1,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,2,1) \\ \overrightarrow{PP_r}=(1,1,-1) \\ P(0,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x+z-1=0$$

b) $V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}]| = |[\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]| = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})| = |(-1,1,1) \cdot (-1,1,1)| = 1+1+1 = 3\ u^3$

2.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.3.4 Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{array} \right.$ y es perpendicular al plano $\pi : 2x-y+3z-1=0$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 3x+y-4z+1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=-4-5\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,-5,1) \\ P_r(1,-4,0) \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,-5,1) \\ \overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,3) \\ P_r(1,-4,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y+4 & z \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 2x+y-z+2=0$$

2.4. Asturias

2.4.1. Modelo de 2020

Problema 2.4.1 Los puntos $A(0,1,0)$ y $B(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercero C pertenece a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ z=1 \end{array} \right.$. Además la recta que une A y C es perpendicular a la recta r.

a) Determina el punto C.

b) Calcula el área del triángulo.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ z=1 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y=\lambda \\ z=1 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,0) \\ P_r(4,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow C(4,\lambda,1)$$

a) $\overrightarrow{AC} = (4,\lambda,1) - (0,1,0) = (4,\lambda-1,1)$

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Longrightarrow (4,\lambda-1,1) \cdot (0,1,0) = \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow C(4,1,1)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1,1,1) - (0,1,0) = (-1,0,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (4,0,1)$.

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{array} \right| \right| = \frac{1}{2}|(0,5,0)| = \frac{5}{2}\ u^2$$

Problema 2.4.2 Dados los puntos $A(2,1,0)$ y $B(1,0,-1)$ y r la recta que determinan. Y sea s la recta definida por $s:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right.$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas.

b) Determina un punto C de la recta s tal que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ sean perpendiculares.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-1)=-(1,1,1) \\ P_r=B(1,0,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=2-\mu \\ y=\mu \\ z=-\mu \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-1,1,-1) \\ P_s(2,0,0) \end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,0,0)-(1,0,-1)=(1,0,1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right|=0,\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array}\right)=2 \Longrightarrow$$

Las dos rectas están en el mismo plano, y como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array}\right)=2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) Sea $C(2-\mu,\mu,-\mu)$

$$\overrightarrow{AC}=(2-\mu,\mu,-\mu)-(2,1,0)=(-\mu,\mu-1,-\mu),$$
$$\overrightarrow{CB}=(1,0,-1)-(2-\mu,\mu,-\mu)=(-1+\mu,-\mu,-1+\mu)$$
$$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}\Longrightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Longrightarrow (-\mu,\mu-1,-\mu)\cdot(-1+\mu,-\mu,-1+\mu)=0\Longrightarrow$$
$$-\mu(-1+\mu)+(\mu-1)(-\mu)+(-\mu)(-1+\mu)=-3\mu^2+3\mu=0\Longrightarrow \mu=0,\ \ \mu=1$$

Si $\mu=0\Longrightarrow C(2,0,0)$
Si $\mu=1\Longrightarrow C(1,1,-1)$

2.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.4.3 Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right.$

a) Calcula un vector director de la recta r.

b) La ecuación del plano π que contiene al punto A y a la recta r.

c) La ecuación de la recta s contenida en π que pasa por A y es perpendicular a r.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ y+z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1) \\ P_r(2,0,0) \end{array}\right.$$

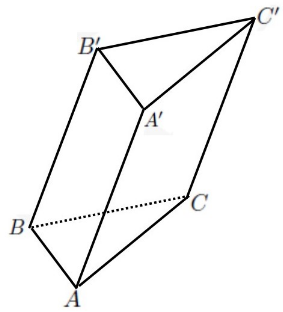
b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-1)\\ \overrightarrow{P_rA}=(0,1,1)\\ P_r(2,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-2 & y & z\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: 2x+y-z-4=0$$

c) $\overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_\pi}$ y $\overrightarrow{u_s}\perp\overrightarrow{u_r}\Longrightarrow \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{array}\right|=3(0,1,1)$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(0,1,1)\\ P_s=A(2,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=2\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2.4.4 Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$, $B'(-1,2,2)$, $C(0,3,0)$, $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos A, B, C y π', al que pertenecen los puntos A', B', C'. Calcula:



a) Las coordenadas de los puntos restantes: A', B.

b) La distancia entre los planos π y π'.

c) El volumen del prisma triangular.

Solución:

a) $A'=A+\overrightarrow{AA'}=A+\overrightarrow{CC'}=(1,0,0)+[(0,4,2)-(0,3,0)]=(1,1,2)\Longrightarrow A'(1,1,2)$
$B=C+\overrightarrow{CB}=C+\overrightarrow{C'B'}=(0,3,0)+[(-1,2,2)-(0,4,2)]=(-1,1,0)\Longrightarrow B(-1,1,0)$

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,3,0)\\ A(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y & z\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi:-5z=0\Longrightarrow \pi: z=0$$

$$d(\pi,\pi')=d(C',\pi)=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{0+0+1}}=2\ u$$

c)

$$V=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right]\right|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}-2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right||=\frac{1}{2}|-10|=5\ u^3$$

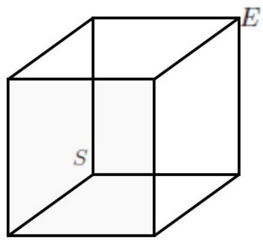
2.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.4.5 Sean $A(2,1,0)$, $B(5,5,0)$ y $C(2,1,5)$ tres vértices de la cara S de un cubo (cuadrados iguales) y $E(-2,4,0)$ un vértice de la cara opuesta. Se pide:

a) El cuarto vértice D de la cara S.

b) La ecuación del plano π que contiene la cara opuesta de S.

c) ¿Cuál es el vértice de la cara S adyacente a E?



Solución:

a) Como no conocemos el orden de los puntos calculamos distancias entre ellos. Como se trata de un cuadrado las distancias de los lados deben de ser iguales. $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(3,4,0)| = 5$, $d(A,C) = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |(0,0,5)| = 5$, $d(B,C) = \left|\overrightarrow{BC}\right| = |(-3,-4,5)| = \sqrt{30}$. Luego $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son dos lados y $\overline{BC}$ es una diagonal. Luego el punto D está en la diagonal cuyo otro extremo es A. Tendríamos:

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (2,1,0) + ((3,4,0) + (0,0,5)) = (5,5,5) \Longrightarrow D(5,5,5)$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,4,0) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,5) \\ A(2,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : 4x - 3y - 5 = 0$$

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (4,-3,0) \Longrightarrow 4x - 3y + \lambda = 0$$

$$E \in \pi' \Longrightarrow -8 - 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 20 \Longrightarrow \pi' : 4x - 3y + 20 = 0$$

c) La distancia desde E a su adyacente tiene que ser 5, probando tenemos $d(E,A) = \left|\overrightarrow{EA}\right| = |(4,-3,0)| = 5$. Luego el punto adyacente al E es A.

Problema 2.4.6 Dados dos planos $\begin{cases} \pi : x + y - 2z = 3 \\ \pi' : x - z = 5 \end{cases}$. Sea P un punto de π cuya proyección ortogonal sobre π' es el punto $A(5,1,0)$

a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que une P y A.

b) Calcula el punto P.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (1,0,-1) \\ P_r = A(5,1,0) \end{cases} \Longrightarrow (x,y,z) = (5,1,0) + \lambda(1,0,-1) \;\; \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$r : \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \forall\lambda \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + z = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) Buscamos el punto de corte de r con π:

$$(5 + \lambda) + 1 - 2(-\lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P(4,1,1)$$

2.5. Cantabria

2.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.5.1 Se emite un rayo láser desde el punto $P(1,2,8)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (1,2,-3)$. El plano $-x-y+3z=-8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

a) Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

b) Determina la posición relativa de rayo y lámina.

c) Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v}=(1,2,-3)\\ P_r=P(1,2,8)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=8-3\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

b) $\pi: -x-y+3z=-8 \Longrightarrow -(1+\lambda)-(2+2\lambda)+3(8-3\lambda)=-8 \Longrightarrow \lambda=\frac{29}{12} \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto.

c) $\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,-3) \Longrightarrow \pi': x+2y-3z+\lambda=0$ como $O(0,0,0)\in\pi' \Longrightarrow 0+0-0+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=0 \Longrightarrow \pi': x+2y-3z=0$

Problema 2.5.2 Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(2,3,-4)$, $C(4,3,2)$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

c) Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución:

a)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(1,1,-5)\\ P_r=A(1,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=1-5\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

b)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,-5)\\ \overrightarrow{AC}=(3,1,1)\\ A(1,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y-2 & z-1\\ 1 & 1 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: 3x-8y-z+14=0$$

c)

$$S_t=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -5\\ 3 & 1 & 1\end{array}\right||=\frac{1}{2}|2(3,-8,1)|=\sqrt{74}\ u^2$$

2.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.5.3 Considera los puntos $A(2,1,5)$, $B(3,4,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x=3-\lambda\\ y=4-3\lambda\\ z=1-4\lambda\end{cases}$

a) Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

b) Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

c) Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Solución:

$$r:\begin{cases} x=3-\lambda\\ y=4-3\lambda\\ z=1-4\lambda\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,-3,-4)\\ P_r(3,4,1)\end{cases}$$

a)

$$s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=(1,3,-4)\\ P_s=A(2,1,5)\end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} x=2+\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=5-4\lambda\end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

b) $\overrightarrow{u_t}\perp\overrightarrow{u_s}$ y $\overrightarrow{u_t}\perp\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & -3 & -4\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=8(3,-1,0)$

$$t:\begin{cases} \overrightarrow{u_t}=(3,-1,0)\\ P_t=B(3,4,1)\end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} x=3+3\lambda\\ y=4-\lambda\\ z=1\end{cases} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

c)

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,-3,-4)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,3,-4)\\ P_s=A(2,1,5)\end{cases} \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-5\\ -1 & -3 & -4\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi: 3x-y-5=0$$

Problema 2.5.4 Considera los puntos $A(1,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(3,5,2)$ y $D(1,1,3)$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

b) Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.

c) Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

a) $\pi:\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(3,-2,-3)\\ \overrightarrow{AC}=(2,2,1)\\ A(1,3,1)\end{cases} \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1\\ 3 & -2 & -3\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi: 4x-9y+10z+13=0$

b) Sustituyendo D en el plano: $4-9+30+13=38\neq 0 \Longrightarrow D\notin\pi$

c)

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(3,-2,-3)\cdot(2,2,1)}{\sqrt{22}\sqrt{9}}=\frac{6-4-3}{3\sqrt{22}}=\frac{-1}{3\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{-22}}{66}=-0,0711$$

$$\Longrightarrow \alpha=\arccos(-0,071)=94^\circ 4' 31''$$

2.6. Castilla La Mancha

2.6.1. Modelo de 2020

Problema 2.6.1 Sean la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$ el punto $P(3, 1, -1)$ y el plano $\pi : 2x+y-z = 0$

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r.

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 2) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}, \overrightarrow{P_rP} = (2, 1, 0)$

$$|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |(2, -4, -1)| = \sqrt{21}$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u$$

b)
- Calculamos $\pi' \parallel \pi / P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 6 + 1 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x + y - z - 8 = 0$$

- Calculamos Q punto de corte de π' con r:

$$2(1 + 3\lambda) + (\lambda) - (-1 + 2\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q(4, 1, 1)$$

- Calculamos la recta t que pasa por P y Q:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 2) \\ P_t = P(3, 1, -1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Problema 2.6.2 Dados los puntos $A(1, 2, 0)$; $B(0, -1, 2)$; $C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$.

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D.

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-1, -3, 2) \\ P_r = A(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{CD} = (-1, 1, -2) \\ P_s = D(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow$

$s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$

$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -3, 2) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -2) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x - y - z + 1 = 0$

b) $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-3,3)$ y $\overrightarrow{AD}=(0,-2,1)$.

$$V=\frac{1}{6}|[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]|=|\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}|=\frac{|-4|}{6}=\frac{2}{3}\ u^3$$

2.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.6.3 Dados los planos $\pi_1: 2x+y+z-2=0$ y $\pi_2:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-2+2\lambda\end{array}\right.$

a) Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3,-3,2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Solución:

a) $\pi_2:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=-2+2\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(1,-1,2)\\ \overrightarrow{v}=(-1,1,0)\\ A(-1,0,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix} x+1 & y & z+2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=$
$0\Longrightarrow \pi_2: x+y+1=0$

$$\cos\alpha==\frac{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}|\,|\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}=\frac{|(2,1,1)\cdot(1,1,0)|}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{|2+1+0|}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}=30^\circ$$

b) Puntos de corte de $\pi_1: 2x+y+z-2=0$ con los ejes coordenados:
Con OX hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow 2x-2=0\Longrightarrow x=1\Longrightarrow A(1,0,0)$
Con OY hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow y-2=0\Longrightarrow y=2\Longrightarrow B(0,2,0)$
Con OZ hacemos $x=0$ e $y=0\Longrightarrow z-2=0\Longrightarrow z=2\Longrightarrow C(0,0,2)$
Calculamos los vectores:
$\overrightarrow{AP}=(3,-3,2)-(1,0,0)=(2,-3,2)$, $\overrightarrow{BP}=(3,-3,2)-(0,2,0)=(3,-5,2)$ y $\overrightarrow{CP}=(3,-3,2)-(0,0,2)=(3,-3,0)$

$$V_t=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CP}\right]\right|==\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2\\ 3 & -5 & 2\\ 3 & -3 & 0\end{vmatrix}|=\frac{|6|}{6}=1\ u^3$$

Problema 2.6.4 Dados el plano $\pi:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\mu\\ y=1+\lambda+a\mu\\ z=1+2\lambda-\mu\end{array}\right.$ la recta $s:\left\{\begin{array}{l} x-2y=1-b\\ z=-3\end{array}\right.$

a) Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$ es paralela al plano π y es perpendicular a la recta s.

Solución:

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \mu \\ y = 1 + \lambda + a\mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (0,1,2) \\ \overrightarrow{v} = (1,a,-1) \\ A(-1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$
$\pi : -(2a+1)x + 2y - z - 2(a+1) = 0$

$s : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = 1 - b \\ z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - b + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,0) \\ P_s(1-b,0,-3) \end{array} \right.$ Si $s \subset \pi \Longrightarrow$

$\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow (-(2a+1),2,-1)\cdot(2,1,0) = -2(2a+1)+2+0 = -4a-2+2 = 0 \Longrightarrow a = 0$

Si $a = 0 \Longrightarrow \pi : -x + 2y - z - 2 = 0$ Para calcular b sustituimos la recta P_s en el plano ya que $P_s \in \pi \Longrightarrow -(1-b) + 0 - (-3) - 2 = 0 \Longrightarrow b = 0$

b) Si $a = 0$ y $b = 3 \Longrightarrow \pi : -x + 2y - z - 2 = 0$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (-1,2,-1)$ y $\overrightarrow{u_s} = (2,1,0)$.

La recta $r \perp s$ y $r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right| = (1,-2,-5)$

$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,0,-1) \\ P_r = P(1,-1,-8) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -8 - 5\lambda \end{array} \right.$

2.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.6.5 Sea el plano $\pi : x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{array} \right.$

a) Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1,2,-1)$ al plano π.

b) Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1,-1,2)$ y $C(0,1,1)$.

Solución:

$r : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(2,0,-2) \end{array} \right.$

a)

$$d(P,\pi) = \frac{|1+4+1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

b) Calculamos el punto de corte A de r con π

$$(2+2\lambda) + 2(\lambda) - (-2+\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow A(2,0,-2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,2) - (2,0,-2) = (-1,-1,4), \quad \overrightarrow{AC} = (0,1,1) - (2,0,-2) = (-2,1,3)$$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{array} \right| \right| = \frac{1}{2}|(-7,-5,3)| = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u^2$$

Problema 2.6.6 Dadas las rectas $r: \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$, $s: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Solución:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 0) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, -2, 1) \\ P_s(0, -2, 1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (0, -2, 1) - (2, 0, 0) = (-2, -2, 1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (3, -2, 1) \\ P(-1, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi: x - y - 5z + 11 = 0$$

2.7. Castilla León

2.7.1. Modelo de 2020

Problema 2.7.1 Dada la recta $r: x + 2 = y = z - 2$ y el plano $\pi: x - z + 2 = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π.

b) Calcular el punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2, 0, 2)$ y hallar la recta que es simétrica de r respecto del plano π.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(-2, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (-2+\lambda) + 0(\lambda) - (2+\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow -2 = 0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. ($r \parallel \pi$)

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P(-2, 0, 2) \in t$

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_t = P(-2, 0, 2) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π

$$-2 + \lambda - (2 - \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(-1, 0, 1)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' buscado

$$\frac{P+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=(-2,0,2)-(-2,0,2)=(0,0,0)$$

Como la recta $r \parallel \pi$ la recta simétrica h de r respecto de π tiene que ser paralela a $r \Longrightarrow \overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{u_r}$ y tenemos

$$h:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ P_h=P''(0,0,0))\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2.7.2 Dada la recta $r: x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$ y el plano $\pi: x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π.

b) Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r, $(1,-1,1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ P_r(1,-1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right. \text{ y } \overrightarrow{u_\pi}=(1,-1,1)$$

a) Sustituyendo r en $\pi \Longrightarrow (1+\lambda)-(-1+2\lambda)+(1+\lambda)=0 \Longrightarrow 3=0$ lo que es imposible y, por tanto, la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común y son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b)

$$d(P,\pi)=\frac{|1+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ u$$

Sea $\pi': x-y+z+m=0$ el plano que buscamos. Tenemos $d(r,\pi')=d(\pi,\pi')=\sqrt{3}$

$$d(r,\pi')=d(P,\pi')=\frac{|1+1+1+m|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|3+m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \Longrightarrow |3+m|=3$$

$$|3+m|=3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}3+m=3 \Longrightarrow m=0 \Longrightarrow \pi_1': x-y+z=0 \equiv \pi \text{ no vale}\\ 3+m=-3 \Longrightarrow m=-6 \Longrightarrow \pi': x-y+z-6=0\end{array}\right.$$

2.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.7.3 Sea el plano $\pi: x-2y+2z+1=0$, la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x-y=0\\ z+1=0\end{array}\right.$ y el punto $A(1,3,-1)$.

Hallar la ecuacion del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,0)\\ P_r(0,0,-1)\end{array}\right.$$

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,0)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,2)A(1,3,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y-3 & z+1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': 2x-2y-3z+1=0$$

Problema 2.7.4 Dado el punto $A(1,2,4)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$,

a) Hallar un punto B de la recta r de forma que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano $\pi : x+2z=0$

b) Hallar un vector (a,b,c) perpendicular a $(1,0,-1)$ y $(2,1,0)$.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,2) \\ P_r(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{u_\pi}=(1,0,2)$ y $B(1+2\lambda,1+\lambda,1+2\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}=(1+2\lambda,1+\lambda,1+2\lambda)-(1,2,4)=(2\lambda,-1+\lambda,-3+2\lambda)$

$\overrightarrow{AB} \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_\pi}=0 \Longrightarrow (2\lambda,-1+\lambda,-3+2\lambda)\cdot(1,0,2)=2\lambda-6+4\lambda=$

$$6\lambda-6=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow B(3,2,3)$$

b) $(a,b,c)=(1,0,-1)\times(2,1,0)=\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right| = (1,-2,1)$

2.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.7.5 Dado el punto $P(2,1,1)$ y la recta $r : \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-4}{-3}$

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P.

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

Solución:

a) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,-3) \\ P_s=P(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1-3\lambda \end{array} \right.$

b)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=P(1,-1,-3) \\ \overrightarrow{P_rP}=(2,1,1)-(2,3,4)=(0,-2,-3) \\ P(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -3x+3y-2z+5=0$$

Problema 2.7.6 Se pide:

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralela a la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{array} \right.$

b) Calcular el punto simétrico del $(1,2,3)$ respecto del plano $\pi : 3x+2y+z+4=0$

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow, r:\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,-1,1) \\ P_r(2,1,0) \end{array}\right.$

$$s \parallel r,\ P(1,2,3)\in s \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_r}=(0,-1,1) \\ P_s=P(1,2,3) \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2-\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right.$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t\perp \pi/P(1,2,3)\in t$

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(3,2,1) \\ P_t=P(1,2,3) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto P' de corte de t y π

$$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+(3+\lambda)+4=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow P'(-2,0,2)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el simétrico P'' buscado

$$\frac{P+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=(-4,0,4)-(1,2,3)=(-5,-2,1) \Longrightarrow P''(-5,-2,1)$$

2.8. Cataluña

2.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.8.1 Se pide:

a) Calcular la ecuación general de un plano π que pasa por el punto $(8,8,8)$ y tiene por vectores directores $\overrightarrow{u}=(1,2,-3)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,0,3)$.

b) Determinar el valor del parámetro real a para que el punto $(1,-5,a)$ pertenezca al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ese punto y es perpendicular al plano π.

Solución:

a)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u}=(1,2,-3) \\ \overrightarrow{v}=(-1,0,3) \\ P(8,8,8) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 3x+z-32=0$$

b) $(1,-5,a)\in\pi \Longrightarrow 3+0+a-32=0 \Longrightarrow a=29$

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_\pi}=(3,0,1) \\ P_s(1,-5,29) \end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=-5 \\ z=29+\lambda \end{array}\right. \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

2.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.8.2 Un avión se desplaza desde un punto $A(0,3,1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi : x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,0)$

a) Calcular las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida.

b) Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (1,-1,0) \\ P_r = A(0,3,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

Calculamos el punto de corte de r con π

$$(\lambda) - 2(3 - \lambda) + 1 = 1 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow B(2,1,1)$$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(2,1,1) - (0,3,1)| = |(2,-2,0)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u$$

b)

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,0) \\ P_r(0,3,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : x + y + z - 4 = 0$$

Problema 2.8.3 Sean las rectas r y s, expresadas por $\dfrac{x-3}{2} = y = z - 1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

a) Determinar la posición relativa de las rectas.

b) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(3,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

$s : \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(0,0,0) \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_sP_r} = (3,0,1)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan. ($\not\parallel$)

b) $|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(2,-1,3)| = \sqrt{14}$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}\ u$$

2.9. Comunidad valenciana

2.9.1. Modelo de 2020

Problema 2.9.1 Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P(10, 0, 10)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia del punto P al plano π.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Solución:

a) $d(P, \pi) = \dfrac{|20 + 0 + 20 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \dfrac{32}{3}\ u$

b) Puntos de corte de $\pi : 2x + y + 2z = 8$ con los ejes coordenados:
Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 2x = 8 \Longrightarrow x = 4 \Longrightarrow A(4, 0, 0)$
Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow y = 8 \Longrightarrow B(0, 8, 0)$
Con OZ hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow 2z = 8 \Longrightarrow z = 4 \Longrightarrow C(0, 0, 4)$

c) Calculamos los vectores:
$\overrightarrow{AP} = (10, 0, 10) - (4, 0, 0) = (6, 0, 10)$, $\overrightarrow{BP} = (10, 0, 10) - (0, 8, 0) = (10, -8, 10)$ y $\overrightarrow{CP} = (10, 0, 10) - (0, 0, 4) = (10, 0, 6)$

$$V_t = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}\right]\right| == \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & -8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix}| = \frac{|512|}{6} = \frac{256}{3}\ u^3$$

Problema 2.9.2 Se dan en el espacio la recta $r : \dfrac{x - \alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta}$ el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$.

c) La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π.

Solución:

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -4, \beta) \\ P_r(\alpha, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \alpha - \lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \beta\lambda \end{cases}$ Sustituimos en π

$$(\alpha - \lambda) + 2(-4\lambda) + 3(\beta\lambda) = 6 \Longrightarrow -9\lambda + 3\beta\lambda = 6 - \alpha \Longrightarrow (-9 + 3\beta)\lambda = 6 - \alpha$$

- Si $\alpha = 6$ y $\beta = 3 \Longrightarrow 0 = 0 \Longrightarrow r \subset \pi$
- Si $\alpha \neq 6$ y $\beta = 3 \Longrightarrow 0 = 6 - \alpha \neq 0 \Longrightarrow r \parallel \pi$
- Si $\alpha \neq 6$ y $\beta \neq 3 \Longrightarrow \lambda = \frac{6-\alpha}{-9+3\beta} \Longrightarrow r$ y π se cortan.

b) Por el apartado anterior si $\alpha = 6$ y $\beta = 3 \Longrightarrow 0 = 0 \Longrightarrow r \subset \pi$ y $d(r, \pi) = 0$

c) Si el plano π' no corta al plano $\pi \iff \pi' \parallel \pi \Longrightarrow \pi' : x + 2y + 3z + m = 0$ como $O \in \pi' \Longrightarrow 0 + 0 + 0 + m = 0 \Longrightarrow \pi' : x + 2y + 3z = 0$

2.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.9.3 Sea la recta $r: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$ y los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(2,1,\alpha)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha = 1$.

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha = 1$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-\lambda\end{array}\right. \text{ y } s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{PQ}=(1,1,\alpha)\\ P_s(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=\alpha\lambda\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{u_r}=k\overrightarrow{u_s}\Longrightarrow (1,1,-1)=k(1,1,\alpha)\Longrightarrow k=1$ y $\alpha=-1$.

b) $$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ P(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: x-y-1=0$$

c) $\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\Longrightarrow \pi': x+y-z+m=0$.
Como $P\in\pi'\Longrightarrow 1+0+0+m=0\Longrightarrow m=-1\Longrightarrow \pi': x+y-z-1=0$

$$d(Q,\pi')=\frac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u$$

Problema 2.9.4 Se dan el plano $\pi: 2x+y-z-5=0$ y los puntos $A(1,2,-1)$, $B(2,1,0)$
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.

c) La distancia entre el punto B y la recta r.

Solución:

a) $$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{u_\pi}=(2,1,-1)\\ A(1,2,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y-2 & z+1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: y+z-1=0$$

b) $$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,1,-1)\\ P_r=A(1,2,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=-1-\lambda\end{array}\right.$$

c) $\overrightarrow{BP_r}=(1,2,-1)-(2,1,0)=(-1,1,-1)$

$$\left|\overrightarrow{BP_r}\times\overrightarrow{u_r}\right|=|\left|\begin{array}{ccc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{array}\right||=|(0,-3,-3)|=3\sqrt{2}.$$

$$d(B,r)=\frac{\left|\overrightarrow{BP_r}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}\ u$$

2.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.9.5 Se dan los planos $\pi : x + y = 1$ y $\pi' : x - y + z = 1$ y el punto $P(1, -1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'.

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'.

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como interseccion de los planos π y π'.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u_{\pi'}} = (1, -1, 1) \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_{\pi'}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2)$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, -2) \\ P_r = P(1, -1, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

b) $d(P, \pi) = \dfrac{|1 - 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ u$

$d(P, \pi') = \dfrac{|1 + 1 + 0 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\ u$

c) $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 2) = -(1, -1, -2) \\ P_s(1, 0, 0) \end{cases}$

Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi'' \perp s / P \in \pi''$:

$$\pi'' : x - y - 2z + m = 0 \Longrightarrow 1 + 1 - 0 + m = 0 \Longrightarrow m = -2 \Longrightarrow \pi'' : x - y - 2z - 2 = 0$$

- Calculamos el punto de corte de s con π'':

$$(1 - \lambda) - \lambda - 2(2\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{6} \Longrightarrow A\left(1 + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right) = A\left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

- Calculamos la recta t que pasa por A y P:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{AP} = (1, -1, 0) - \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(-1, -5, 2) \\ \\ P_t = P(1, -1, 0) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$t : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 - 5\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Problema 2.9.6 Se dan las rectas $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $s : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ y el plano $\pi : 3x + ay - z + 1 = 0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r esta contenida en el plano π.

b) La distancia entre las rectas r y s.

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

Solución:

Tenemos:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 2) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(-1, 0, -2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

a) Sustituimos r en π:

$$3x + ay - z + 1 = 0 \Longrightarrow 3(1) + a(2 + \lambda) - (2\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow 2a + a\lambda - 2\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda(a - 2) + (2a + 4) = 0$$

Para que la recta esté contenida en el plano tendría que ocurrir $0 = 0$, lo cual no se da nunca. Si tomamos $a = 2$ quedaría ¡$6 = 0$! por lo que $r \parallel \pi$ y si $a \neq 2 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2a + 4}{a - 2} \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ la recta r cortaría al plano π. La ningún valor de a la recta estaría contenida en el plano π.

b) Tomamos $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, 2, 0) - (-1, 0, -2) = (2, 2, 2)$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan. } (\not\parallel)$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |(3, 4, -2)| = \sqrt{29}$$

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{10}{\sqrt{29}} = \frac{10\sqrt{29}}{29} \ u$$

c) $t : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = \lambda y = 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 2, 2) \\ P_t(0, 0, -2) \end{cases}$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_t}|}{|\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_t}|} = \frac{|(0, 1, 2) \cdot (1, 2, 2)|}{\sqrt{5}\sqrt{9}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \ u$$

2.10. Extremadura

2.10.1. Modelo de 2020

Problema 2.10.1 Sean las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array} \right.$ y $s : x-1 = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$

a) Estudie la posición relativa de las dos rectas.

b) Calcule la distancia del punto $P(16,0,0)$ a la recta r.

Solución:

$r : \left\{ \begin{array}{l} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x=-1+4\lambda \\ y=4-2\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(4,-2,1) \\ P_r(-1,4,0) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,3,2) \\ P_s(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow$

$s : \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow$

a) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,-4,-1)$, $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}] = \left| \begin{array}{rrr} 2 & -4 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$ y $\left| \begin{array}{rr} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{array} \right| = 14 \neq 0 \Longrightarrow$

$\text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{P_rP_s} \\ \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 2$ y $\text{Rango}\left(\begin{array}{c} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

b) $\overrightarrow{PP_r} = (-1,4,0) - (16,0,0) = (-17,4,0)$

$\left| \overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r} \right| = | \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -17 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{array} \right| | = |(4,17,18)| = \sqrt{629}.$

$$d(B,r) = \frac{\left| \overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r} \right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{13209}}{21}\ u$$

Problema 2.10.2 Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1,3,-1)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,1)$ y $\overrightarrow{w} = (2,-1,0)$

a) ¿Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$?

b) Halla el área del triángulo formado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

c) Halla el vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$ de módulo 1.

Solución:

a) Hay que comprobar si son linealmente independientes:

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right| = 9 \neq 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ y } \overrightarrow{w} \text{ son linealmente independientes} \Longrightarrow$$

Los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) $S_t = \dfrac{1}{2}\,|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \dfrac{1}{2}| \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right| | = \dfrac{1}{2}|3(1,-1,-2)| = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}\ u^2$

c) $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1,2,7) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{t}\right| = 3\sqrt{6}$

$\overrightarrow{h} = \dfrac{\overrightarrow{t}}{\left|\overrightarrow{t}\right|} = -\dfrac{(1,2,7)}{3\sqrt{6}} = \left(-\dfrac{1}{3\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{3\sqrt{6}}, -\dfrac{7}{3\sqrt{6}}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{18}, -\dfrac{2\sqrt{6}}{18}, -\dfrac{7\sqrt{6}}{18}\right)$

$\overrightarrow{h} \perp \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{h} \perp \overrightarrow{w}$ y $\left|\overrightarrow{h}\right| = 1$.

2.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.10.3 Sean el plano π de ecuación $2x + y - z - 2 = 0$ y la recta r dada por $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano.

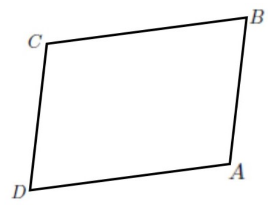
b) Calcule la distancia de la recta al plano.

Solución:

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = 3(1,-1,1) \\ P_r(0,2,1) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ Sustituyendo en el plano π: $2(\lambda) + (2-\lambda) - (1+\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow$ ¡$-1 = 0$! $\Longrightarrow r \parallel \pi$ (paralelos)

b) $d(r,\pi) = d(P_r\pi) = \dfrac{|0+2-1-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\ u$

Problema 2.10.4 Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-2)$, $B(4,3,1)$ y $C(1,0,1)$, como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D.

b) Calcule el área del paralelogramo.

Solución:

a) $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (1,3,-2) + [(1,0,1) - (4,3,1)] = (1,3,-2) + (-3,-3,0) = (-2,0,-2)$

b) $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}| = |9(1,-1,-1)| = 9\sqrt{3}\ u^2$

2.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.10.5 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (4,3,\alpha)$, $\overrightarrow{v} = (\alpha,1,0)$ y $\overrightarrow{w} = (2\alpha,1,\alpha)$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$)

a) Determine los valores de α para que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente independientes.

b) Para el valor $\alpha = 1$ exprese $\overrightarrow{w}$ como combinacion lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -4\alpha^2 + 4\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = 1$
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

b) Si $\alpha = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (4, 3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (2, 1, 1)$

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \Longrightarrow (2, 1, 1) = a(4, 3, 1) + b(1, 1, 0) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = 4a + b \\ 1 = 3a + b \\ 1 = a \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$

Problema 2.10.6 Dados el plano π_1 determinado por los puntos $(0, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$ y $(1, 2, 6)$ y el plano π_2 dado por la ecuación $x - y + z = 3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no este contenida en ninguno de ellos.
Solución:
Tenemos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$ y $C(1, 2, 6)$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 1, 5) \\ A(0, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x + 3y - z - 2 = 0$$

El vector director de la recta que buscamos será:
$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -3, -5)$
Con la dirección de este vector habrá infinitas rectas que no estén contenidas en los planos π_1 y π_2. Tomamos un punto que no esté contenido en ninguno de ellos, por ejemplo $O(0, 0, 0)$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, -5) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -5\lambda \end{array} \right.$$

2.11. Galicia

2.11.1. Modelo de 2020

Problema 2.11.1 Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 0)$.

Solución:

a) π_1 con $\pi_2 \Longrightarrow \dfrac{m}{2} = \dfrac{-1}{3} \Longrightarrow m = \dfrac{-2}{3}$.
Si $m = \dfrac{-2}{3} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 son paralelos. En caso contrario se cortan.

b) $\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,0) \\ A(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x - z = 0$

Problema 2.11.2 Se pide:

a) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1,-3,0)$ y es perpendicular a la recta $\left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$

b) Calcula la distancia del punto $Q(1,1,1)$ al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right.$
$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \Longrightarrow \pi : -x + y + z + m = 0$ como $P \in \pi \Longrightarrow -1 - 3 + 0 + m = 0 \Longrightarrow m = 4 \Longrightarrow \pi : -x + y + z + 4 = 0$

b) $d(Q,\pi) = \dfrac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\ u$

Para calcular el punto simétrico seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / Q \in t \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (-1,1,1) \\ P_t = Q(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow$
$t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$
- Calculamos el punto de corte de t con π:
$$-(1-\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) + 4 = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{5}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$
- $\dfrac{Q+Q''}{2} = Q' \Longrightarrow Q'' = 2Q' - Q = \left(\dfrac{16}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right) - (1,1,1) = \left(\dfrac{13}{3}, -\dfrac{7}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

2.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.11.3 Se pide:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$

Solución:

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{AC} = (4,1,6) \\ A(3,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$

b) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(4,2,-3)\\ P_r=P(-1,-2,2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-1+4\lambda\\ y=-2+2\lambda\\ z=2-3\lambda\end{array}\right.$

Problema 2.11.4 Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$ y $s:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Solución:

$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-1,-2)\\ P_r(3,0,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{array}\right., \; s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,4,3)\\ P_s(0,-3,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=\mu\\ y=-3+4\mu\\ z=-2+3\mu\end{array}\right.$

y $\overrightarrow{P_sP_r}=(3,0,-1)-(0,-3,-2)=(3,3,1)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}3&3&1\\2&-1&-2\\1&4&3\end{vmatrix}=0$ y $\begin{vmatrix}3&3\\2&-1\end{vmatrix}=-9\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{P_sP_r}\\ \overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=2$ (las dos rectas están en el mismo plano)

Como $\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=9\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

Calculamos el punto de corte: $\left\{\begin{array}{l}3+2\lambda=\mu\\ -\lambda=-3+4\mu\\ -1-2\lambda=-2+3\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda=-1\\ \mu=1\end{array}\right. \Longrightarrow P(1,1,1)$

2.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.11.5 Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{d_r}=(1,0,3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y $\pi:-2x+y+z=0$. Se pide la posicion relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Solución:

$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,0,3)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=0\\ z=3\lambda\end{array}\right.$. Sustituimos en π y tenemos: $-2(1+\lambda)+0+3\lambda=0\Longrightarrow \lambda=2\Longrightarrow r$ y π se cortan.
El punto de corte será $A(3,0,6)$.

Problema 2.11.6 Se pide:

a) Calcule k sabiendo que los vectores $\overrightarrow{u}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{v}=(0,k,1)$ y $\overrightarrow{w}=(2,2,2)$ son coplanarios.

b) Obtenga la ecuación implícita del plano π que pasa por $P(1,0,0)$ y contiene a $r:x-1=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$

Solución:

a) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&k&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 2(2k-2)=0\Longrightarrow k=1$

b) $r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,-4,3)\\ P_r(1,0,-1)\end{cases}$ y $\overrightarrow{PP_r}=(1,0,-1)-(1,0,0)=(0,0,-1)$

$$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{PP_r}=(0,0,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,-4,3)\\ P(1,0,0)\end{cases}\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -4 & 3\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi:4x+y-4=0$$

2.12. Islas Baleares

2.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.12.1 Considera el punto $P(2,-1,1)$ y la recta definida por

$$r:\begin{cases}2x-3y+4z-1=0\\ x+2y-3z-2=0\end{cases}$$

a) Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta.

b) Calcula la ecuación del plano, π, perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.

c) Calcula el punto, Q, de intersección del plano π con la recta r.

d) De todas las rectas que pasan por el punto $P(2,-1,1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a) $r:\begin{cases}2x-3y+4z-1=0\\ x+2y-3z-2=0\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-11+10\lambda\\ z=-8+7\lambda\end{cases}\Longrightarrow r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,10,7)\\ P_r(0,-11,-8)\end{cases}\Longrightarrow$

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y+11}{10}=\frac{z+8}{7}$$

b) $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(1,10,7)\Longrightarrow \pi:x+10y+7z+m=0$, como $P\in\pi\Longrightarrow 2-10+7+m=0\Longrightarrow$ $m=1\Longrightarrow \pi:x+10y+7z+1=0$

c) Sustituyendo r en π:

$$\pi:(\lambda)+10(-11+10\lambda)+7(-8+7\lambda)+1=0\Longrightarrow \lambda=\frac{11}{10}\Longrightarrow Q\left(\frac{11}{10},0,-\frac{3}{10}\right)$$

d) La recta s está contenida en π y pasa por Q luego

$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{11}{10},0,-\frac{3}{10}\right)-(2,-1,1)=\left(-\frac{9}{10},1,-\frac{13}{10}\right)=-\frac{1}{10}(9,-10,13)\\ P_s=P(2,-1,1)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$s:\begin{cases}x=2+9\lambda\\ y=-1-10\lambda\\ z=1+13\lambda\end{cases}$$

Problema 2.12.2 Dadas la recta r y el plano π:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1},\quad \pi:3x-my+z=1$$

se pregunta si existe algún valor del parámetro m para el que

a) el plano y la recta son paralelos.

b) o bien, el plano contiene la recta.

c) o bien, el plano y la recta se cortan exactamente en un punto.

En cada caso, si existe, calcúlalo.
Solución:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -1) \\ P_r(1, -1, -2) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

Sustituimos r en π:
$3(1 + 2\lambda) - m(-1 + 3\lambda) + (-2 - \lambda) = 1 \Longrightarrow (3m - 5)\lambda = m$

a) Si $m = \dfrac{5}{3} \Longrightarrow ¡0 = \dfrac{5}{3}! \Longrightarrow r$ y π son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b) $\nexists m \in \mathbb{R}/0 = 0, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r$ no está contenida en π para ningún valor de m.

c) Si $m \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{3}\right\} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{m}{3m-5} \Longrightarrow$

$$A\left(1 + \frac{2m}{3m-5}, -1 + \frac{3m}{3m-5}, -2 - \frac{m}{3m-5}\right) = A\left(\frac{5(m-1)}{3m-5}, \frac{5}{3m-5}, \frac{10-7m}{3m-5}\right)$$

2.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.12.3 Dadas las rectas

$$(I) : \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \qquad (II) : \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

a) Calcula un punto posicional y un vector director de cada una.

b) Calcula la ecuación vectorial de cada una.

c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y el vector diferencia, o vector resto, de los puntos posicionales obtenidos.

d) Del anterior rango, deduce la posición relativa de ambas rectas.

Solución:

a)

$$(I) : \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \Longrightarrow (I) : \begin{cases} x = 11 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 13 + 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow (I) : \begin{cases} \overrightarrow{u_I} = (2, 1, 3) \\ P_I(11, 0, 13) \end{cases}$$

$$(II) : \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Longrightarrow (II) : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow (II) : \begin{cases} \overrightarrow{u_{II}} = (1, -1, 2) \\ P_{II}(0, -1, -5) \end{cases}$$

b) $(I) : (x, y, z) = (11, 0, 13) + \lambda(2, 1, 3)$
$(II) : (x, y, z) = (0, -1, -5) + \lambda(1, -1, 2)$

c) $\overrightarrow{P_{II}P_I} = (11,0,13) - (0,-1,-5) = (11,1,18)$
$\begin{vmatrix} 11 & 1 & 18 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_{II}P_I} \\ \overrightarrow{u_I} \\ \overrightarrow{u_{II}} \end{pmatrix} = 2$ (las dos rectas están en el mismo plano)

d) Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_I} \\ \overrightarrow{u_{II}} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

Problema 2.12.4 Dados los planos

$$(I): 3x - ay + 2z - (a-1) = 0; \quad (II): 2x - 5y + 3z - 1 = 0; \quad (III): x + 3y - (a-1)z = 0$$

a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a, los tres planos no son paralelos.

b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a.

Solución:

a) (I) con $(II) \Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{-a}{-5} \neq \frac{2}{3} \Longrightarrow (I)$ y (II) no son paralelos.
(I) con $(III) \Longrightarrow \frac{3}{1} = \frac{-a}{3} = \frac{2}{-a+1}$ por la primera igualdad sería $a = -9$ pero en ese caso no se cumple la segunda igualdad, luego (I) y (III) no son paralelos.
(II) con $(III) \Longrightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-5}{3} \Longrightarrow (II)$ y (III) no son paralelos.
En conclusión, los tres planos no pueden ser paralelos entre si.

b) Construimos el sistema de ecuaciones asociado

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - ay + 2z = a - 1 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ x + 3y - (a-1)z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -a & 2 & (a-1) \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -(a-1) & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$|A| = -2a^2 + 14a - 20 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ a = 5 \end{array} \right.$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{2,5\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & -1 \\ 0 & 11 & -5 & -1 \end{array} \right) =$ $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y los tres planos se cortan dos a dos. Los tres planos se cortan en una recta como un libro.
- Si $a = 5$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 14 & -14 & -4 \end{array} \right) =$ $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 14F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -90 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema incompatible, los tres planos no tienen puntos comunes y se cortan dos a dos formando en su interior un prisma triangular.

2.13. Islas Canarias

2.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.13.1 Dadas las rectas siguientes $r:\left\{\begin{array}{l}x+y-z=4\\x+2y=7\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l}x=2\\y+5=0\end{array}\right.$

a) Estudie la posición relativa de r y s.

b) Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto $A(11,-2,5)$

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}x+y-z=4\\x+2y=7\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=7-2\lambda\\y=\lambda\\z=3-\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,1,-1)\\P_r(7,0,3)\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l}x=2\\y+5=0\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=2\\y=-5\\z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(0,0,1)\\P_s(2,-5,0)\end{array}\right.$ y

$\overrightarrow{P_sP_r}=(7,0,3)-(2,-5,0)=(5,5,3)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr}5&5&3\\-2&1&-1\\0&0&1\end{array}\right|=15\neq 9\Longrightarrow r$ y s se cruzan. ($r \nparallel s$)

b) $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(-2,1,-1)\Longrightarrow \pi:-2x+y-z+m=0$ como $P\in\pi\Longrightarrow -22-2-5+m=0\Longrightarrow m=29\Longrightarrow \pi:-2x+y+z+29=0$

Problema 2.13.2 Consideremos la recta $r:\left\{\begin{array}{l}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{array}\right.$ y el plano $\pi_1: x-y+3z=12$ que determinan la recta r.

a) Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π_1

b) Sabiendo que la recta r corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\2&-1&0\\3&0&-4\end{array}\right|=(4,8,3)\\P_r(1,-3,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+4\lambda\\y=-3+8\lambda\\z=1+3\lambda\end{array}\right.$$

a)

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{\pi_1}}=(1,-1,3)\\\overrightarrow{u_r}=(4,8,3)\\P_r(1,-3,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1&y+3&z-1\\1&-1&3\\4&8&3\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi: 9x-3y-4z-14=0$$

b) $(1+4\lambda)-(-3+8\lambda)+3(1+3\lambda)=12\Longrightarrow \lambda=1\Longrightarrow Q(5,5,4)$

2.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.13.3 Dada la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x=-2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right.$, y dado el plano $\pi: x-3y+5z=2$

a) ¿Cuál es la posición relativa de la recta r y el plano π?.

b) Calcular el plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}x=-2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,1,1)\\ P_r(0,2,2)\end{array}\right.$
Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow (-2\lambda)-3(2+\lambda)+5(2+\lambda)=2 \Longrightarrow$ ¡$4=2$! $\Longrightarrow$ r y s son paralelas.

b)

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(1,-3,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(-2,1,1)\\ P_r(0,2,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x & y-2 & z-2\\ 1 & -3 & 5\\ -2 & 1 & 1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow$$

$$\pi': 8x+11y+5z-32=0$$

Problema 2.13.4 Consideremos el punto $A(1,2,1)$ y la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x+y=5\\ 3y+z=14\end{array}\right.$

a) Encuentre la ecuación del plano π que contiene al punto A y es perpendicular a la recta r.

b) Consideremos $P(1,4,2)$, un punto de la recta r. Y sea s la recta determinada por los puntos A y P. Calcule el ángulo que forman las rectas r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+y=5\\ 3y+z=14\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=5-t\\ y=t\\ z=14-3t\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-3)\\ P_r(5,0,14)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-3) \Longrightarrow \pi: -x+y-3z+m=0$, como $A\in\pi \Longrightarrow -1+2-3+m=0 \Longrightarrow m=2 \Longrightarrow \pi: -x+y-3z+2=0 \Longrightarrow \pi: x-y+3z-2=0$

b) $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AP}=(1,4,2)-(1,2,1)=(0,2,1)\\ P_s=A(1,2,1)\end{array}\right.$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\,|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|(-1,1,-3)\cdot(0,2,1)|}{\sqrt{11}\sqrt{5}}=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{55}}=$$

$$\frac{\sqrt{55}}{55}=0,1348399724 \Longrightarrow \alpha=82^\circ 15'2''$$

2.14. La Rioja

2.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.14.1 Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\left\{\begin{array}{l}(a-1)x+y-z=a\\(a+1)x+(2a+1)y+z=-a\\ax+ay+z=-a\end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}a-1&1&-1&a\\a+1&2a+1&1&-a\\a&a&1&-a\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$|A|=2a^2-2=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{\pm1\}\Longrightarrow|A|\neq0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a=1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\2&3&1&-1\\1&1&1&-1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2-2F_3\\F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&1\\0&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1-F_2\\F_2\\F_3\end{array}\right]=$ $\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y los tres planos se cortan dos a dos. Los tres planos se cortan en una recta como un libro.
- Si $a=-1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-1&-1\\0&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2\\2F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-1&-1\\0&-1&1&1\\0&-3&3&3\end{array}\right)=$ $\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2\\F_3-3F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&-1&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y los tres planos se cortan dos a dos. Los tres planos se cortan en una recta como un libro.

Problema 2.14.2 Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$ y $\overrightarrow{v}=(0,1,1)$

a) Hallar un vector $\overrightarrow{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\1&2&3\\0&1&1\end{array}\right|=(-1,-1,1)$

$$\overrightarrow{w}=\frac{\overrightarrow{w'}}{\left|\overrightarrow{w'}\right|}=\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) $S=|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=|(-1,-1,1)|=\sqrt{3}\ u^2$

2.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.14.3 Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta
$r:\left\{\begin{array}{l}x+3y-4z+9=0\\-x-2y+z+1=0\end{array}\right.$ y es perpendicular al plano $\pi: x+3y+z+1=0$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+3y-4z+9=0\\-x-2y+z+1=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=21-5\lambda\\y=-10+3\lambda\\z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-5,3,1)\\P_r(21,-10,0)\end{array}\right.$$

$$\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(1,3,1)\\\overrightarrow{u_r}=(-5,3,1)\\P_r(21,-10,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x-21&y+10&z\\1&3&1\\-5&3&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi': y-3z+10=0$$

Problema 2.14.4 Dados las rectas r y s:

$$r:\left\{\begin{array}{l}x+y-z=1\\4x+2y+2z=10\end{array}\right. \qquad s:\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$$

y el plano $\pi: x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s.

b) el plano π y la recta s.

Solución:

a) $$r:\left\{\begin{array}{l}x+y-z=1\\4x+2y+2z=10\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=4-2\lambda\\y=-3+3\lambda\\z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,3,1)\\P_r(4,-3,0)\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,2,3)\\P_s(-3,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=-3+\lambda\\y=-2+2\lambda\\z=1+3\lambda\end{array}\right.$$

$\overrightarrow{P_sP_r}=(4,-3,0)-(-3,-2,1)=(7,-1,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc}7&-1&-1\\-2&3&1\\1&2&3\end{array}\right|=49\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } (r\not\parallel s)$$

b) Sustituimos s en $\pi \Longrightarrow (-3+\lambda)+(-2+2\lambda)-(1+3\lambda)+6=0 \Longrightarrow 0=0 \Longrightarrow s\subset\pi$. La recta s está contenida en el plano π.

2.15. Madrid

2.15.1. Modelo de 2020

Problema 2.15.1 Se consideran los puntos $A(3,1,2)$, $B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 2)$ y $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} = (3, -2, -2)$. Tenemos $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Longrightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 0) + (3, -2, -2) \Longrightarrow Q(2, -1, -2)$.

b) Tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AP} = (-4, 0, -2) = -2(2, 0, 1) \\ P_r = A(3, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BC} = (2, -4, -6) = 2(1, -2, -3) \\ P_s = B(0, 3, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 4 - 3\mu \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda = \mu \\ y = 1 = 3 - 2\mu \\ z = 2 + \lambda = 4 - 3\mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow H(1, 1, 1)$$

c) $\overrightarrow{PA} = (4, 0, 2) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{PA}\right| = 2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{PB} = (1, 2, 4) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{PB}\right| = \sqrt{21}$ y $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4 + 0 + 8 = 12$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right| \left|\overrightarrow{PB}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{5}\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{105}} = \frac{2\sqrt{105}}{35}$$

$$\alpha = 54^\circ 9' 32''$$

Problema 2.15.2 Dadas las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$, se pide:

a) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) Determinar la posición relativa de r y s.

c) Escribir la ecuación del plano que contiene a la recta r y al vector perpendicular a r y a s.

d) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2, -1, 1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(-3, 2, 1) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{OP_s} = (-3,2,1)$ y $\left|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{OP_s}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}\right| = |(-3,-5,1)| = \sqrt{35}$

$$d(O,s) = \frac{\left|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{OP_s}\right|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{210}}{6}$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (-4,0,1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan } r \nparallel s.$$

c) $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,4,4) = 4(0,1,1)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-2,-1,1) \\ P_r(1,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$

d) Como intersección de dos planos. Uno de ellos sería el calculado en el apartado anterior y el otro sería:

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(-3,2,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x + y - z + 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

2.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.15.3 Dadas las rectas

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \quad \text{y } s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases},$$

se pide:

a) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \\ P_r(0,-2,1) \end{cases}, s : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(-1,-4,0) \end{cases}$

y $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,-2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $\pi \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \Longrightarrow x+y+3z+\lambda = 0$ como $P(2,-1,5) \in \pi \Longrightarrow 2-1+15+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -16 \Longrightarrow \pi : x+y+3z-16 = 0$.

c) $\pi' \parallel r$ y $s \subset \pi' \Longrightarrow \pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(-1,-4,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi' : 4x + 5y - 3z + 24 = 0$$

Problema 2.15.4 Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z = 4$, se pide:

a) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,2,-3) \\ P_t = Q(-1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = -1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1-3\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto Q' proyección de Q sobre π en el punto de corte de t con π:

$$(-1+\lambda) + 2(2\lambda) - 3(1-3\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{7} \Longrightarrow Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

b) Si $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \pi' : x+2y-3z+\lambda = 0$ como $P(-3,1,2) \in \pi' \Longrightarrow -3+2-6+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 7 \Longrightarrow \pi' : x+2y-3z+7 = 0$

c) $\pi'' \perp \pi \Longrightarrow \pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,-3) \\ \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-1) \\ P(-3,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \left| \begin{array}{ccc} x+3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$\pi'' : x + y + z = 0$$

2.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020 (coincidente)

Problema 2.15.5 Se consideran los puntos $A(0,-4,2)$, $B(3,-2,3)$ y $C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

b) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

c) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{AB}=(3,2,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(-1,1,1)$. Tenemos que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2+1=0\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ luego los tres puntos determinan un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto se encuentra en el vértice A. Los catetos serán los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y la hipotenusa el segmento $\overline{BC}$.

b) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(3,2,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,1,1)\\ A(0,-4,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc} x & y+4 & z-2\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$

$$\pi: x-4y+5z-26=0$$

c) Sea $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{BC}=(-4,-1,0)=-(4,1,0)\\ P_r=B(3,-2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+4\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=3\end{array}\right.$

Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos un plano $\pi'\perp r/A\in\pi'\Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}$:

$$\pi': 4x+y+\lambda=0\Longrightarrow 0-4+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=4\Longrightarrow \pi': 4x+y+4=0$$

- Calculamos el punto A' de corte de r y π':

$$4(3+4\lambda)+(-2+\lambda)+4=0\Longrightarrow \lambda=-\frac{14}{17}\Longrightarrow A'\left(-\frac{5}{17},-\frac{48}{17},3\right)$$

- $\dfrac{A+A''}{2}=A'\Longrightarrow A''=2A'-A=2\left(-\dfrac{5}{17},-\dfrac{48}{17},3\right)-(0,-4,2)\Longrightarrow A''\left(-\dfrac{10}{17},-\dfrac{28}{17},4\right)$

Problema 2.15.6 Dadas la recta $r:\left\{\begin{array}{l}x-z=0\\ x+2y-z=4\end{array}\right.$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1,1,0)$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

c) Encontrar una perpendicular común a r y a s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,0,1)\\ P_r(0,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=2\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,1,0)\\ \\ P_s=A\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}-\lambda\\ \\ y=\dfrac{1}{4}+\lambda\\ \\ z=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

a) Hacemos $\overrightarrow{P_rP_s} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) - (0,2,0) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{4} = 2 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) Sea $\overrightarrow{u_t} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi := \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -x + 2y + z - 4 = 0 \Longrightarrow \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

c) La recta perpendicular a r y s la calculamos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 = \pi : x - 2y - z + 4 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ \\ P_s = A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-1/4 & y-1/4 & z-1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \pi_2 : 2x + 2y + 4z - 3 = 0$$

$$t : \begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x + 2y + 4z - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \lambda \\ \\ y = \frac{11}{6} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{cases}$$

2.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.15.7 Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

a) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

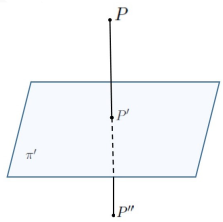
Solución:
Tenemos $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{cases}$

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,3,1) \\ P(3,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x+y-4z-6=0$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

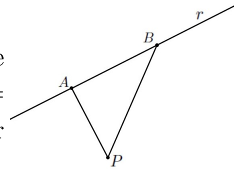
- Calculamos un plano $\pi' \perp r / P \in \pi'$:
  $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \Longrightarrow \pi' : -x+y+\lambda = 0$
  $P \in \pi' \Longrightarrow -3+3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : -x+y=0$

- Calculamos el punto P' de corte de π' con r. Para ello pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas y sustituimos en el plano.
  $r : \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow -(2-\lambda)+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. Y sustituyendo en r tenemos $P'(1,1,-1)$



- Ahora tenemos que P' es el punto medio entre P y su simétrico P'': $\dfrac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P'-P = (2,2,-2)-(3,3,0) \Longrightarrow P''(-1,-1,-2)$

c) Como A y B están en la recta r podemos poner de forma general $A(2-\lambda,\lambda,-1)$ y $B(2-\mu,\mu,-1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (\lambda-\mu)(1,-1,0)$.
Tenemos que el vector $\overrightarrow{AP} = (3,3,0)-(2-\lambda,\lambda,-1) = (1+\lambda,3-\lambda,1)$
Como el ángulo recto se encuentra en el vértice A tenemos que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \Longrightarrow (1,-1,0)\cdot(1+\lambda,3-\lambda,1) = 0 \Longrightarrow 1+\lambda-3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A(1,1,-1)$, el vector $\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (1-\mu)(1,-1,0)$.



El área sería:

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}|(1-\mu)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(1-\mu)(1,1,-4)| = \frac{1}{2}|1-\mu|\sqrt{18} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}|1-\mu| = \frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |1-\mu| = 1.$$

- $1-\mu = 1 \Longrightarrow \mu = 0 \Longrightarrow B(2,0,-1)$ y $A(1,1,-1)$.
- $1-\mu = -1 \Longrightarrow \mu = 2 \Longrightarrow B(0,2,-1)$ y $A(1,1,-1)$.

Problema 2.15.8 Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$. Se pide:

a) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

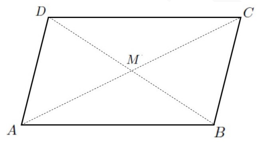
c) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

a) $M\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC}=(3,3,-1)$ y $\overrightarrow{BC}=(2,2,-2)$.

Tenemos: $\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=-4(1,-1,0)$



$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)\\ P_r=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{5}{2}+\lambda\\ \\ y=\dfrac{3}{2}-\lambda\\ \\ z=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

b) $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=(1,0,-1)+(2,2,-2)=(3,2,-3)$

Tenemos $\overrightarrow{AD}=(2,2,-2)$ y $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}|=|-4(1,-1,0)|=4\sqrt{2}\ u^2$$

c)

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3+3-1}{\sqrt{19}\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{57}}{57}\Longrightarrow \alpha=48^\circ 31'38''$$

2.16. Murcia

2.16.1. Modelo de 2020

Problema 2.16.1 Los puntos $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,3)$ son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

a) Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P=(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π.

c) Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución:

a) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-3,0,3)\\ A(3,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-3 & y & z\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi: x+y+z-3=0$

b) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}(1,1,1)\\ P_r=P(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$

c) $D(1+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = (-2+\lambda, 1+\lambda, 1+\lambda)$
$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} -2+\lambda & 1+\lambda & 1+\lambda \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|27\lambda| = 18 \Longrightarrow |\lambda| = 4 \Longrightarrow \lambda = \pm 4$
Si $\lambda = 4 \Longrightarrow D(5,5,5)$.
Si $\lambda = -4 \Longrightarrow D(-3,-3,-3)$

Problema 2.16.2 Considere las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(5,6,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5+\lambda \\ y = 6+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1) \\ P_s(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow s :$
$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-\lambda \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (4,6,0)$
$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b) Calculamos la recta t como intersección de dos planos:
Primero calculamos su vector director:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1,1,0)$$

$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(5,6,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-5 & y-6 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x+y-2z-13 = 0$

$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,-1) \\ P_s(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : x+y+2z+1 = 0$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} x+y-2z-13 = 0 \\ x+y+2z+1 = 0 \end{array} \right.$$

2.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

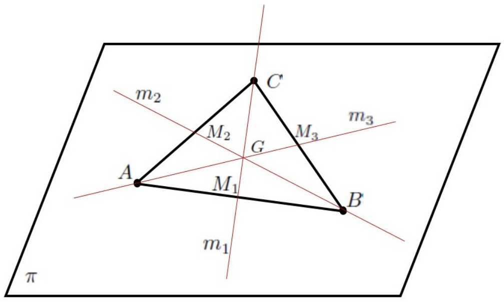
Problema 2.16.3 Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A(-1, 2, 3)$, $B(3, -4, 1)$ y $C(1, -4, 5)$.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

a) Calculamos las tres medianas:



- Sea M_1 punto medio del segmento $AB \Longrightarrow M_1 = \dfrac{A+B}{2} = (1, -1, 2)$, la recta m_1 :
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{CM_1} = (1, -1, 2) - (1, -4, 5) = (0, 3, -3) = 3(0, 1, -1) \\ C(1, -4, 5) \end{array} \right. \Longrightarrow m_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -4 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{array} \right.$$

- Sea M_2 punto medio del segmento $AC \Longrightarrow M_2 = \dfrac{A+C}{2} = (0, -1, 4)$, la recta m_2 :
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BM_2} = (0, -1, 4) - (3, -4, 1) = (-3, 3, 3) = 3(-1, 1, 1) \\ B(3, -4, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow m_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \mu \\ y = -4 + \mu \\ z = 1 + \mu \end{array} \right.$$

- Sea M_3 punto medio del segmento $CB \Longrightarrow M_3 = \dfrac{C+B}{2} = (2, -4, 3)$, la recta m_3 :
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AM_3} = (2, -4, 3) - (-1, 2, 3) = (3, -6, 0) = 3(1, -2, 0) \\ A(-1, 2, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow m_3 : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \beta \\ y = 2 - 2\beta \\ z = 3 \end{array} \right.$$

b) Calculamos el punto de corte de dos de estas rectas, por ejemplo m_1 con m_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 3 - \mu \\ -4 + \lambda = -4 + \mu \\ 5 - \lambda = 1 + \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow G(1, -2, 3)$$

Sólo falta comprobar que este punto pertenece a m_3:
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = -1 + \beta \Longrightarrow \beta = 2 \\ -2 = 2 - 2\beta \Longrightarrow \beta = 2 \\ 3 = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow G \in m_3$$
Como el punto $G(1, -2, 3)$ pertenece a las tres rectas, y no hay coincidencias, es el punto de corte de las tres (se trata del baricentro)

Problema 2.16.4 Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}, \quad \pi : x - 2y - z = 4$$

a) Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

$$\text{Tenemos: } r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,0) \\ P_r(-1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 \end{array} \right. \quad \text{y } \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow (-1+2\lambda) - 2(2+\lambda) - 1 = 4 \Longrightarrow ¡-6 = 4! \Longrightarrow r$ y π son paralelos. $(r \parallel \pi)$

b) $d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \dfrac{|-1-4-1-4|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{10}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\ u$

c) $\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,0) \\ P_r(-1,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x - 2y + 5z = 0$

2.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.16.5 Considere los puntos $P(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta $r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$.

a) Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

$$\text{Tenemos: } r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,4) \\ P_r(0,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{array} \right.$$

a) El punto $R(\lambda, 1+\lambda, 4+4\lambda)$ es un punto de r. Calculamos los vectores $\overrightarrow{PQ} = (-3,-2,5) - (5,6,1) = (-8,-8,4)$ y $\overrightarrow{PR} = (\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda) - (5,6,1) = (\lambda-5, -5+\lambda, -2+4\lambda)$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}|\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \lambda-5 & -5+\lambda & -2+4\lambda \\ -8 & -8 & 4 \end{array} \right|| = \frac{1}{2}|36(\lambda-1)(1,1,0)| =$$

$$18|\lambda-1|\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \Longrightarrow |\lambda-1| = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 1 = 1 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow R_1(2,3,7) \\ \lambda - 1 = -1 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow R_2(0,1,-1) \end{array} \right.$$

b) $s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = -4(2,2,-1) \\ P_s = P(5,6,1) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 6 + 2\mu \\ z = 1 - \mu \end{cases}$

Comprobamos que r y s se cortan calculando ese punto

$$\begin{cases} \lambda = 5 + 2\mu \\ 1 + \lambda = 6 + 2\mu \\ -1 + 4\lambda = 1 - \mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -2 \end{cases} \Longrightarrow H(1,2,3)$$

Ahora comprobamos que son perpendiculares

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1,1,4) \cdot (2,2,-1) = 2 + 2 - 4 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow r \perp s$$

Problema 2.16.6 Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \qquad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$$

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución:

a) $r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-3,5,1) \\ P_r(2,3,0) \end{cases}$

$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_s(1,0,5) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_sP_r} = (2,3,0) - (1,0,5) = (1,3,-5)$

b) $\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan. $(r \nparallel s)$

$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-3,5,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_r(2,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi: x + y - 2z - 5 = 0$

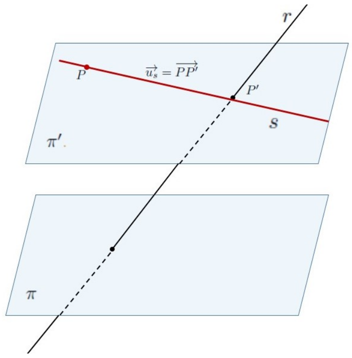
2.17. Navarra

2.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.17.1 Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$ y pasa por el punto $P(-1,3,1)$.

Solución:

Seguimos el siguiente procedimiento:



- Calculamos un plano $\pi' \parallel \pi / P \in \pi'$:

$$\pi' : 2x - y + 3z + m = 0 \Longrightarrow -2 - 3 + 3 + m = 0 \Longrightarrow m = 2 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 3z + 2 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π' con r. Para ello pasamos r a su ecuación paramétrica y sustituimos en π':

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 3x + y - z - 7 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = (1, -1, 2) \\ P_r(0, 5, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2(\lambda) - (5 - \lambda) + 3(-2 + 2\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(1, 4, 0)$$

- La recta buscada s es la que pasa por P y P':

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{P'P} = (-1, 3, 1) - (1, 4, 0) = (-2, -1, 1) \\ P_s = P(-1, 3, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$s : \frac{x + 1}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 1}{1}$$

Problema 2.17.2 Los puntos $A(-1, 2, 1)$ y $B(2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

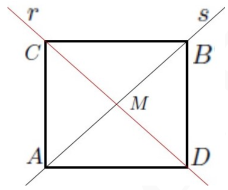
$$r : \frac{x}{-1} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z + 1}{-4}$$

Solución:

El enunciado presenta dos posibles posiciones para los dos vértices. Pueden pertenecer a una de las diagonales del cuadrado o bien ser consecutivos:

- Si A y B son vértices consecutivos tendremos $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{u_r}$ lo que evidentemente no se cumple, ya que $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 0) \neq k(-1, 1, -4)$.
- Si A y B son vértices de una de las diagonales si es posible que los otros vértices se encuentre en la recta r.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,1,-4)\\ P_r(0,4,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-\lambda\\ y=4+\lambda\\ z=-1-4\lambda\end{array}\right. \quad \text{y}$$



$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{AB}=3(1,1,0)\\ P_s=A(-1,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=1\end{array}\right.$$

Estas dos rectas se tienen que cortar en el punto medio M entre A y $B \Longrightarrow M=\dfrac{A+B}{2} \Longrightarrow$ $M\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2},1\right)$, lo comprobamos.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}=-\lambda \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\\ \frac{7}{2}=4+\lambda \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\\ 1=-1-4\lambda \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow M\in r$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}=-1+\lambda \Longrightarrow \lambda=\frac{3}{2}\\ \frac{7}{2}=2+\lambda \Longrightarrow \lambda=\frac{3}{2}\\ 1=1 \Longrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right. \Longrightarrow M\in s$$

Tenemos que $M\in r$, $M\in s$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=2 \Longrightarrow r$ y s se cortan en el punto M.

$$d(A,M)=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2},1\right)-(-1,2,1)\right|=\left|\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)\right|=\frac{3}{2}|(1,1,0)|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Un punto de r es $P(-\lambda,4+\lambda,-1-4\lambda)$ y buscamos dos de ellos que están a una distancia $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ del punto M:

$$d(M,P)=\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|(-\lambda,4+\lambda,-1-4\lambda)-\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2},1\right)\right|=\left|\left(-\lambda-\frac{1}{2},4-\frac{7}{2}+\lambda,-2-4\lambda\right)\right|=$$

$$\sqrt{\left(-\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)^2+(-2-4\lambda)^2}=\sqrt{\frac{9(2\lambda+1)^2}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \frac{9(2\lambda+1)^2}{2}=\frac{18}{4}$$

$$\Longrightarrow (2\lambda+1)^2=1 \Longrightarrow 4\lambda(\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda=0,\quad \lambda=-1$$

Si $\lambda=-1 \Longrightarrow P_1(1,3,3) \Longrightarrow C(1,3,3)$
Si $\lambda=0 \Longrightarrow P_1(0,4,-1) \Longrightarrow D(0,4,-1)$

Otra forma podría haber sido construyendo una esfera de centro M y radio $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Los puntos buscados están en la intersección de la recta r con la esfera.

2.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.17.3 El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

Solución:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-2,2)-(2,0,5)=(-1,-2,-3)\\ \overrightarrow{P_1P_3}=(3,-1,2)-(2,0,5)=(1,-1,-3)\\ P_1(2,0,5)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-2 & y & z-5\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi:$$

$x-2y+z-7=0$
Sea r la recta perpendicular a π que pase por el centro C de la esfera
$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,1)\\ P_r=C(0,1,-3)\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=-3+\lambda\end{cases}$. El punto de corte de esta recta con el plano π es el punto de tangencia de la esfera con el plano

$$\lambda-2(1-2\lambda)+(-3+\lambda)-7=0\Longrightarrow \lambda=2\Longrightarrow P(2,-3,-1)$$

El radio es la distancia de C a P o, lo que es lo mismo, la distancia de C a π

$$d(C,\pi)=\frac{|0-2-3-7|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}\ u$$

Problema 2.17.4 Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas: $r:\begin{cases}x+2y+z-1=0\\ x+3z-7=0\end{cases}$ y $s:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$

Solución:

Tenemos: $r:\begin{cases}x+2y+z-1=0\\ x+3z-7=0\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 1&2&1\\ 1&0&3\end{vmatrix}=2(3,-1,-1)\\ P_r(4,-2,1)\end{cases} \Longrightarrow r:$
$\begin{cases}x=4+3\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=1-\lambda\end{cases}$

$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(2,1,0)\\ P_s(-2,0,-3)\end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases}x=-2+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=-3\end{cases}$ y sea $\overrightarrow{P_sP_r}=(4,-2,1)-(-2,0,-3)=(6,-2,4)$

Analizamos su posición relativa $\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}6&-2&4\\ 3&-1&-1\\ 2&1&0\end{vmatrix}=30\neq 0\Longrightarrow r$ y s se cruzan.

Calculamos el vector perpendicular a r y $s\Longrightarrow \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 3&-1&-1\\ 2&1&0\end{vmatrix}=(1,-2,5)$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,-2,5)\\ \overrightarrow{u_r}=(3,-1,-1)\\ P_r(4,-2,1)\end{cases}\Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix}x-4&y+2&z-1\\ 1&-2&5\\ 3&-1&-1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi_1:7x+16y+5z-1=0$$

$$\pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,-2,5)\\ \overrightarrow{u_s}=(2,1,0)\\ P_s(-2,0,-3)\end{cases}\Longrightarrow \pi_2:\begin{vmatrix}x+2&y&z+3\\ 1&-2&5\\ 2&1&0\end{vmatrix}=0\Longrightarrow \pi_2:-x+2y+z+1=0$$

$$t:\begin{cases}7x+16y+5z-1=0\\ -x+2y+z+1=0\end{cases}\Longrightarrow t:\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=-3+5\lambda\end{cases}\Longrightarrow t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(1,-2,5)\\ P_t(0,1,-3)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$t:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{5}$$

2.18. País Vasco

2.18.1. Modelo de 2020

Problema 2.18.1 Sean la recta
$r:\left\{\begin{array}{l}4x-3y+4z=1\\3x-2y+z=0\end{array}\right.$ y el plano $\pi: x-y+Az=0$

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano sea paralelo a r?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(0,0,0)$.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\4&-3&4\\3&-2&1\end{array}\right|=(5,8,1)$, $\overrightarrow{u_\pi}=(1,-1,A)$ y $\overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_\pi}\Longrightarrow\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}=0\Longrightarrow$
$5-8+A=0\Longrightarrow A=3$

b) $\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(5,8,1)\Longrightarrow\pi':5x+8y+z+\lambda=0$ como $O(0,0,0)\in\pi'\Longrightarrow 0+0+0+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow\pi':5x+8y+z=0$

Problema 2.18.2 Se consideran los tres puntos $A(0,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados?
En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta que los contiene.
En caso negativo calcular el plano que los contiene.
Solución:
$\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$ y $\overrightarrow{AC}(-1,-1,1)$
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Longrightarrow(1,1,0)=(-k,-k,k)\Longrightarrow k=0$ y $k=-1$ lo cual es imposible y, por tanto no estan alineados.
$\left|\begin{array}{ccc}0&0&1\\1&1&1\\-1&-1&2\end{array}\right|=0$ y $\left|\begin{array}{cc}0&1\\1&1\end{array}\right|=-1\Longrightarrow\text{Rango}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=2\Longrightarrow$ Los puntos no están alineados.

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,0)\\\overrightarrow{AC}=(-1,-1,1)\\A(0,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}x&y&z-1\\1&1&0\\-1&-1&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow\pi:x-y=0$$

2.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 2.18.3 Se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1,2,3)$ y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{v}=(-1,-2,-3)$ y $\overrightarrow{w}=(1,3,5)$

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

Solución:

a)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{v}=(-1,-2,-3)\\\overrightarrow{w}=(1,3,5)\\A(-1,2,3)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}x+1&y-2&z-3\\-1&-2&-3\\1&3&5\end{array}\right|=0\Longrightarrow\pi:-x+2y-z-2=0$$

b) $\overrightarrow{u_\pi} \perp \overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}} = (-1,2,-1)\cdot(A,-1,5) = -A-2-5 = 0 \Longrightarrow A = -7$

Problema 2.18.4 Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{array}\right.$ Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right| = (5,8,1) \\ P_r(-7,-9,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=-7+5\lambda \\ y=-9+8\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$r \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi} = (5,8,1)\cdot(2,-1,A) = 10-8+A = 0 \Longrightarrow A=-2$
Un plano $\pi' \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (5,8,1) \Longrightarrow \pi' : 5x+8y+z+m=0$ como $O(0,0,0)\in\pi' \Longrightarrow$ $0+0+0+m=0 \Longrightarrow m=0 \Longrightarrow \pi' : 5x+8y+z=0$

2.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 2.18.5 Dada la recta $r: \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{array}\right.$, y el plano $\pi : 3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

a) hallar α para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

Solución:

a) $$r: \left\{\begin{array}{l} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow\Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right| = (5,-14,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$r: \left\{\begin{array}{l} x=1+5\lambda \\ y=-1-14\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \text{ y } \pi : 3x+(\alpha+1)y+\alpha z+\alpha=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (3,\alpha+1,\alpha)$$

$$r \parallel \pi \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi} = 0 \Longrightarrow 15-14(\alpha+1)+\alpha=0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{13}.$$

b) $\pi : 3x+\left(\frac{1}{13}+1\right)y+\frac{1}{13}z+\frac{1}{13}=0 \Longrightarrow \pi : 39x+14y+z+1=0$. Comprobamos si el punto $P\in\pi \Longrightarrow 39+14+2+1=56\neq 0 \Longrightarrow P\notin\pi$

Problema 2.18.6 Hallar el punto Q, simétrico de $P(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución:
Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $r\perp\pi/P\in r \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1)$

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(1,2,3) \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto M de corte de r con π

$$(1+\lambda)+(2+\lambda)+(3+\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow M(-1,0,1)$$

- M es el punto medio entre P y Q

$$\frac{P+Q}{2}=M \Longrightarrow Q=2M-P=(-2,0,2)-(1,2,3)=(-3,-2,-1) \Longrightarrow Q(-3,-2,-1)$$

Capítulo 3

Análisis

3.1. Resúmenes teóricos

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ *o* $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f' \, dx = \dfrac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert$	$\int \dfrac{f'}{f} \, dx = \ln \lvert f \rvert$
Exponencial	$\int e^x \, dx = e^x$	$\int e^f \cdot f' \, dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f' \, dx = \dfrac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f \, dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f \, dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2 \, dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f \, dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f) \, dx = \tan f$
	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x$	$\int \dfrac{f'}{\cos^2 f} \, dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2 \, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f \, dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f) \, dx = -\cot f$
	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x$	$\int \dfrac{f'}{\sin^2 f} \, dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x$	$\int \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} \, dx = \arcsin f$
	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \dfrac{x}{a}$	$\int \dfrac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}} \, dx = \arcsin \dfrac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x$	$\int \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} \, dx = \arccos f$
	$\int \dfrac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arccos \dfrac{x}{a}$	$\int \dfrac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}} \, dx = \arccos \dfrac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x$	$\int \dfrac{f'}{1+f^2} \, dx = \arctan f$
	$\int \dfrac{1}{a^2+x^2} \, dx = \arctan \dfrac{x}{a}$	$\int \dfrac{f'}{a^2+f^2} \, dx = \arctan \dfrac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c} \, dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$, ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \ \text{ donde } \ c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.

- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right)\cdot\infty$

- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$

- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1 + x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

3.2. Andalucía

3.2.1. Modelo de 2020

Problema 3.2.1 Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} \quad \text{para } x \neq -1$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ **Verticales:** $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \infty$$

☛ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \frac{1}{2}$$

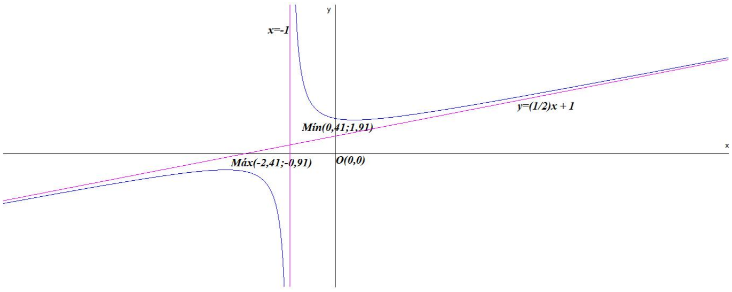
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{x}{2}\right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = \frac{1}{2}x + 1$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, -1-\sqrt{2})$	$(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$	$(-1+\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1+\sqrt{2})$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(-1+\sqrt{2}; \dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}\right) = (0,41; 1,91)$ y un máximo relativo en el punto $\left(-1-\sqrt{2}; \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\right) = (-2,41; -0,91)$



Problema 3.2.2 Sea la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$)

Solución:

$$F(x)=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=e^x\Longrightarrow dt=e^x dx\\ dx=\frac{1}{e^x}dt\Longrightarrow dx=\frac{1}{t}dt\end{array}\right]=\int\frac{1+t}{t(1-t)}\,dt=$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{A}{t}-\frac{B}{t-1}=\frac{-A(t-1)+Bt}{t(1-t)}\\ 1+t=-A(t-1)+Bt\\ t=0\Longrightarrow 1=A\\ t=1\Longrightarrow 2=B\\ \frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}\end{array}\right]=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}\right)dx=$$

$$\ln|t|-2\ln|t-1|+C=\ln|e^x|-2\ln|e^x-1|+C=x-\ln(e^x-1)^2+C$$

$$F(1)=1-2\ln(e-1)+C=1\Longrightarrow C=2\ln(e-1)\simeq 1,083$$

$$F(x)=x-\ln(e^x-1)^2+2\ln(e-1)$$

Problema 3.2.3 Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución:

a) $f'(x)=e^x(x-a+1)$ como $f'(0)=0\Longrightarrow -a+1=0\Longrightarrow a=1$

b) Si $a=1\Longrightarrow f(x)=(x-1)e^x\Longrightarrow f'(x)=xe^x\Longrightarrow f'(x)=(x+1)e^x=0\Longrightarrow x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función cambia de curvatura en $x=-1$ y en ese punto la función tiene continuidad y, por tanto, se trata de un punto de inflexión.

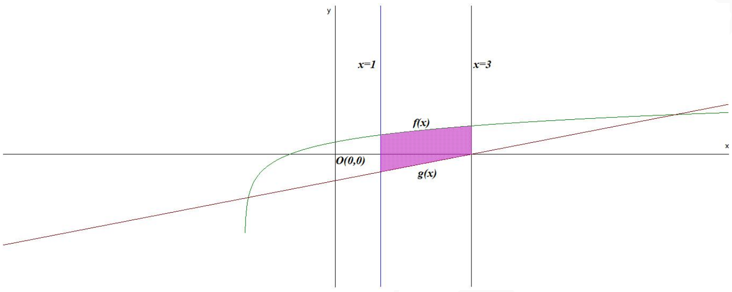
Problema 3.2.4 Considera las funciones $f : (-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-3)$.

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas)

b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) Dando valores se obtiene:



b)

$$S = \int_1^3 \left(\ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)\right) dx = \left.(x+2)\ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_1^3 =$$

$$\ln\left(\frac{3125}{27}\right) - 1 \simeq 3,751\ u^2$$

Inciso:

$$\int \ln(x+2)\, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+2) \Longrightarrow du = \frac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array}\right] = x\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\, dx =$$

$$x\ln(x+2) - \int \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = x\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2) = (x+2)\ln(x+2) - x$$

3.2.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.2.5 Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} \quad \text{para } x \neq \pm 1$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución:

a) Asíntotas:

- ☛ **Verticales:** $x = -1$ No es asíntota, es una discontinuidad evitable (un agujero)

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\left[\frac{2}{0^+}\right]=\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{2x-2}{2x}=2$$

$x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\pm\infty$$

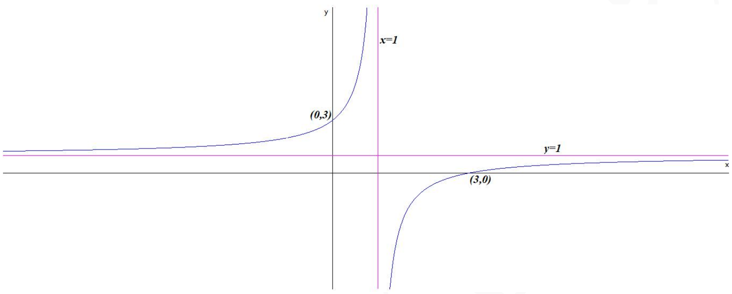
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\left[\frac{-4}{0^-}\right]=+\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\left[\frac{-4}{0^+}\right]=-\infty$$

- ☛ **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=1$$

- ☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos y $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow f$ creciente en todo el dominio de la función.



Problema 3.2.6 Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\dfrac{1}{9}$.

Solución:
Calculamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow xe^{3x} = 0 \Longrightarrow x = 0$, luego los límites de integración son los extremos del intervalo $[0, a]$
Calculamos la primitiva de $f(x)$:

$$F(x)=\int xe^{3x}\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{3x}dx\Longrightarrow v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{array}\right]=\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx=$$

$$\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{e^{3x}}{9}=\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}$$

$$S=\int_0^a xe^{3x}\,dx=\left.\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}\right]_0^a=e^{3a}\frac{3a-1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\Longrightarrow e^{3a}\frac{3a-1}{9}=0\Longrightarrow$$

$$3a-1=0\Longrightarrow a=\frac{1}{3}$$

Problema 3.2.7 Sea la función $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sin x}{2-\cos x}$.

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{3}$

Solución:

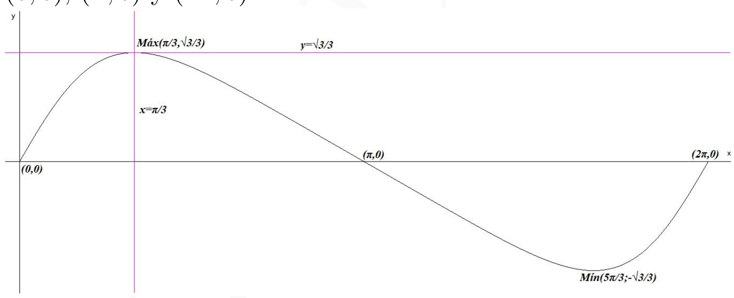
a) $f'(x) = \dfrac{2\cos x - 1}{(\cos x - 2)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

	$[0, \pi/3)$	$(\pi/3, 5\pi/3)$	$(5\pi/3, 2\pi]$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ y decreciente en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{5\pi}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Los puntos de corte con el eje OX serían: $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sin x}{2 - \cos x} = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow$ $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.



Como se puede ver en la gráfica estos extremos son absolutos.

b) $b = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ en este punto se ha visto que hay un máximo y, por tanto, la tangente es horizontal $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y la normal es vertical $x = \dfrac{\pi}{3}$

Problema 3.2.8 Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{(x - 2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$.

Solución:

a)

$$F(x)=\int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}\,dx=\int\left(3+\frac{12x-8}{(x-2)^2}\right)dx=$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{12x-8}{(x-2)^2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}=\dfrac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\\ 12x-8=A(x-2)+B\\ x=0\Longrightarrow -8=-2A+B\\ x=2\Longrightarrow 16=B\\ B=16,\quad A=12 \end{array}\right]=$$

$$3x+\int\left(\frac{12}{x-2}+\frac{16}{(x-2)^2}\right)dx=$$

$$3x+12\ln|x-2|+16\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+C=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C$$

b)

$$F(3)=9-16+C=5\Longrightarrow C=12$$

$$F(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+12$$

3.2.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.2.9 Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x(x^2-5x+6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica.
Solución:
$f'(x)=e^x(x^2-3x+1)\Longrightarrow f''(x)=e^x(x^2-x-2)=0\Longrightarrow x=-1$ y $x=2$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es cóncava ($\smile$) en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ y convexa ($\frown$) en el intervalo $(-1,2)$.
La función presenta puntos de inflexión en $\left(-1,\dfrac{12}{e}\right)$ y $(2,0)$.

Problema 3.2.10 Calcula $\displaystyle\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx$
Solución:
Recordando un poco de trigonometría tenemos:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x\Longrightarrow \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)=\frac{2x-\sin 2x}{4}$$

$$F(x)=\int x\sin^2 x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=\sin^2 x\,dx\Longrightarrow v=\frac{2x-\sin 2x}{4}\end{array}\right]=$$

$$\frac{2x^2-x\sin 2x}{4}-\frac{1}{4}\int(2x-\sin 2x)\,dx=\frac{2x^2-x\sin 2x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{\cos 2x}{8}=$$

$$\frac{x^2 - x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} = \frac{2x^2 - 2x\sin 2x - \cos 2x}{8}$$

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x\, dx = F(\pi) - F(0) = \frac{2\pi^2 - 1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

Problema 3.2.11 Sea la función derivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} e^{2ax-4b} & \text{si} & x < 1 \\ 1 - x\ln x & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$.
(ln denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) Si f es derivable tiene que ser continua y derivable:

- ☛ f continua en $x = 1$:
  $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b}$
  $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (1 - x\ln x) = 1$
  Luego $e^{2a-4b} = 1 \Longrightarrow 2a - 4b = 0$.

- ☛ f derivable en $x = 1$:
  $f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2a \cdot e^{2ax-4b} & \text{si} & x < 1 \\ -\ln x - 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$.
  Tenemos $f'(1^-) = 2a \cdot e^{2a-4b}$ y $f'(1^+) = -1 \Longrightarrow 2ae^{2a-4b} = -1$

- ☛ $\left\{ \begin{array}{l} 2a - 4b = 0 \\ 2ae^{2a-4b} = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow 2ae^0 = -1 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\dfrac{1}{2} \\ \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{array} \right.$

b) En $x = 2 \Longrightarrow f(x) = 1 - x\ln x \Longrightarrow f(2) = 1 - 2\ln 2$ y
$f'(x) = -\ln x - 1 \Longrightarrow m = f'(2) = -1 - \ln 2$.
La ecuación de la recta tangente es
$y - (1 - 2\ln 2) = -(1 + \ln 2)(x - 2) \Longrightarrow y = -(1 + \ln 2)x + 2 + 2\ln 2 + 1 - 2\ln 2 = -(1 + \ln 2)x + 3 \Longrightarrow y = -(1 + \ln 2)x + 3$

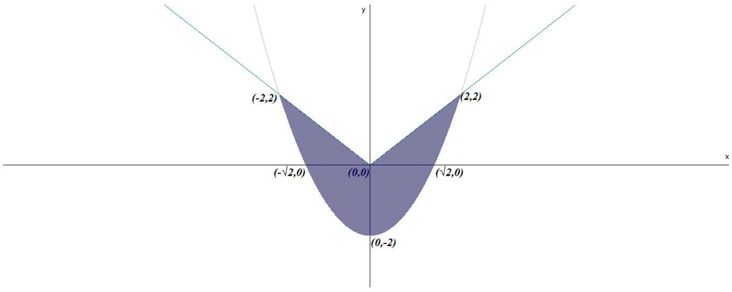
Problema 3.2.12 Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan.

b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -x & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} -x = x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 & \text{si} & x < 0 \\ x = x^2 - 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{lll} (-2, 2) & \text{si} & x < 0 \\ (2, 2) & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$
Dando valores a las dos funciones dibujamos el recinto



b) Hay dos recintos

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (-x - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_{-2}^{0} = \frac{10}{3}$$

$$S_2 = S_1 \text{ por simetría} \Longrightarrow S = |S_1| + |S_2| = \frac{10}{3} \cdot 2 = \frac{20}{3} = 6,667\ u^2$$

3.3. Aragón

3.3.1. Modelo de 2020

Problema 3.3.1 Determine la integral: $\displaystyle\int \frac{2 - e^x}{e^{2x} - 1}\, dx$
usando el cambio de variable $t = e^x$

Solución:

$$\int \frac{2 - e^x}{e^{2x} - 1}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{2 - t}{t^2 - 1}\, \frac{dt}{t} =$$

$$\int \frac{2 - t}{(t+1)(t-1)t}\, dt = \left[\begin{array}{c} \frac{2-t}{(t+1)(t-1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1} = \frac{A(t^2-1)+B(t^2-t)+C(t^2+t)}{(t+1)(t-1)t} \\ -t + 2 = A(t^2 - 1) + B(t^2 - t) + C(t^2 + t) \\ t = 0 \Longrightarrow 2 = -A \Longrightarrow A = -2 \\ t = 1 \Longrightarrow 1 = 2C \Longrightarrow C = 1/2 \\ t = -1 \Longrightarrow 3 = 2B \Longrightarrow B = 3/2 \end{array} \right] =$$

$$\int \left(\frac{-2}{t} + \frac{3/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1} \right) = -2 \ln |t| + \frac{3}{2} \ln |t+1| + \frac{1}{2} \ln |t-1| + C =$$

$$-2 \ln e^x + \frac{3}{2} \ln |e^x + 1| + \frac{1}{2} \ln |e^x - 1| + C = -2x + \frac{3}{2} \ln |e^x + 1| + \frac{1}{2} \ln |e^x - 1| + C$$

Problema 3.3.2 Calcule el límite: $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln(1 + e^x)}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln(1 + e^x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{e^x}{1+e^x}} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x(1 + e^x)}{e^x(1 + x^2)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x + 2xe^x}{e^x + x^2 e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2 + 2e^x + 2xe^x}{e^x + 2xe^x + x^2 e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2e^x + 2xe^x}{e^x + 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{e^x(4+2x)}{e^x(3+4x+x^2)}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4+2x}{3+4x+x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{x}=0$$

Problema 3.3.3 Considere la función:

$$f(x)=\ln(1+x^2)$$

a) Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$, si existen.

b) Determine los puntos de inflexión de la función $f(x)$, si existen.

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}=0\Longrightarrow x=0.$

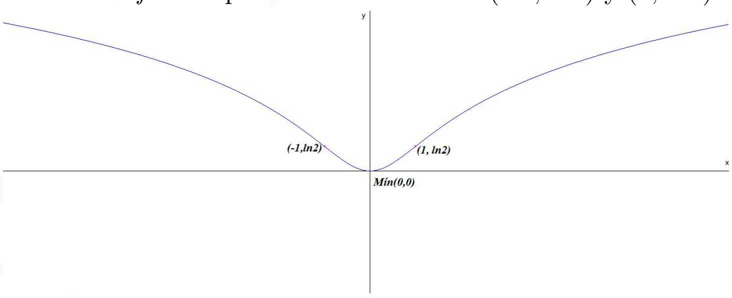
	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función f decrece en el intervalo $(-\infty,0)$.
La función f crece en el intervalo $(0,\infty)$.
La función f tiene un mínimo en el punto $(0,0)$.

b) $f''(x)=-\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=0\Longrightarrow x=\pm 1.$

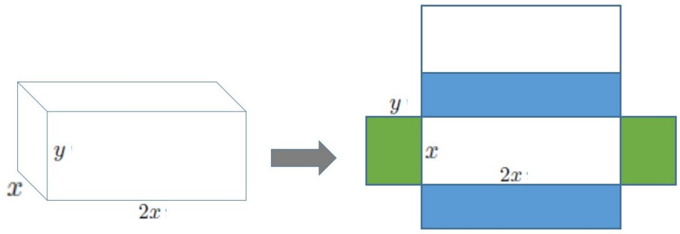
	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función f es convexa en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.
La función f es cóncava en el intervalo $(-1,1)$.
La función f tiene puntos de inflexión en $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$



Problema 3.3.4 Se desea construir un contenedor con la forma habitual de una caja (tipo caja de zapatos cerrada) cuya capacidad sea de 35 m^3. Dado que el único material empleado para su construcción es bastante costoso, se desea que la cantidad total de material empleado sea mínima. Además, el contenedor debe ser cerrado, es decir hay que construir sus seis caras.
Sabiendo que la base es un rectángulo cuyo lado largo es el doble que el corto, determine las dimensiones del mismo para que el coste del material empleado para su fabricación sea mínimo.

Solución:



- ☛ $V(x,y) = 2x^2y = 35 \Longrightarrow y = \dfrac{35}{2x^2}$
- ☛ $S(x,y) = 4x^2 + 2xy + 4xy = 4x^2 + 6xy$ sustituyendo $y \Longrightarrow$

$$S(x) = 4x^2 + \frac{210x}{2x^2} = \frac{8x^4 + 210x}{2x^2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{8x^3 - 105}{x^2} = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt[3]{105}}{2} \simeq 2,359 \ \text{ m}$$

	$\left(0, \frac{\sqrt[3]{105}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt[3]{105}}{2}, \infty\right)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $\left(0, \frac{\sqrt[3]{105}}{2}\right)$ y crece en el intervalo $\left(\frac{\sqrt[3]{105}}{2}, \infty\right)$, por tanto, tiene un mínimo en $x = \dfrac{\sqrt[3]{105}}{2} = 2,359 \Longrightarrow y = \dfrac{35}{2 \cdot 2,359^2} = 3,145$
Las medidas de la caja tienen que ser $2,359$ m de ancho, $4,718$ m de largo y $3,145$ m de alto.
El área mínima total sería $S(2,359) = 66,77$ m^2

3.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.3.5 Calcule el límite: $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (1 + x - \sin x)^{1/x^3}$

Solución:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} (1 + x - \sin x)^{1/x^3} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}(1 + x - \sin x - 1) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Luego

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} (1 + x - \sin x)^{1/x^3} = e^{1/6}$$

Problema 3.3.6 Considere la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.
Solución:

- Verticales: $1 - e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 0$ No es asíntota ya que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left[\ \frac{0}{0}\ \right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x}{e^{-x}} = 0$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left[\ \frac{\infty}{-\infty}\ \right] = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} = \left[\ \frac{-\infty}{\infty}\ \right] = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left[\ \frac{\infty}{1}\ \right] = \infty$$

- Oblicuas: Cuando $x \longrightarrow -\infty$ no hay por haber horizontales, estudiamos cuando $x \longrightarrow \infty$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x - xe^{-x}} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x}{1-e^{-x}} = \left[\ \frac{\infty}{1}\ \right] = \infty$$

  Luego no hay oblicuas.

Problema 3.3.7 Se considera la siguiente función $f(x) = \ln(2x+1)$

a) Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{2}$

Solución:

a) $2x + 1 > 0 \Longrightarrow x > -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

$f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos y crece en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

b) $b = \left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2$ y $m = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = 1\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Longrightarrow y = x - \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$

Problema 3.3.8 Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}\cdot \ln^2 x\right)\, dx$

Solución:

$$\int \left(\sqrt{x}\cdot \ln^2 x\right)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln^2 x \Longrightarrow du = \frac{2\ln x dx}{x} \\ dv = x^{1/2}dx \Longrightarrow v = \frac{2x^{3/2}}{3} \end{array}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\int x^{1/2}\ln x\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^{1/2}dx \Longrightarrow v = \frac{2x^{3/2}}{3} \end{array}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{2x^{3/2}\ln x}{3} - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx\right] =$$

$$\frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{2x^{3/2}\ln x}{3} - \frac{4x^{3/2}}{9}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{8x^{3/2}\ln x}{9} + \frac{16x^{3/2}}{27} =$$

$$\frac{2x^{3/2}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8)}{27} + C$$

3.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.3.9 Calcule el límite: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{2/\tan x}$

Solución:

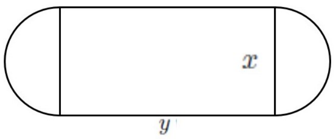
$$\lim_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{2/\tan x}=[1^{\infty}]=e^{\lambda}$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{2}{\tan x}(1+x-1)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{\tan x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{2}{1/\cos^2 x}=2$$

Luego

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{2/\tan x}=e^{2}$$

Problema 3.3.10 Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base y metros y altura x metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi$ m^2. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle x e y de modo que se verifique este requisito.

Solución:
El radio de las semicircunferencias es $r=\dfrac{x}{2}$. El área encerrada es:

$$S(x,y)=xy+\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{4xy+\pi x^2}{4}=4+\pi\Longrightarrow y=\frac{4(\pi+4)-\pi x^2}{4x}$$

La longitud del contorno que hay que optimizar será la función:

$$L(x,y)=2x+2y+2\pi\frac{x}{2}\Longrightarrow L(x)=2x+\frac{4(\pi+4)-\pi x^2}{2x}+\pi x=$$

$$\frac{4x^2+4(\pi+4)-\pi x^2+2\pi x^2}{2x}=\frac{4(\pi+4)+(\pi+4)x^2}{2x}$$

$$L'(x)=\frac{2x(\pi+4)2x-(4(\pi+4)+(\pi+4)x^2)2}{4x^2}=\frac{2x^2(\pi+4)-4(\pi+4)-(\pi+4)x^2}{2x^2}=$$

$$\frac{(\pi+4)(2x^2-4-x^2)}{2x^2}=\frac{(\pi+4)(x^2-4)}{2x^2}=0\Longrightarrow x^2-4=0\Longrightarrow x=\pm 2$$

La solución negativa no es relevante.

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$L'(x)$	$-$	$+$
$L(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(0, 2)$ y crece en el intervalo $(2, \infty)$, por tanto, tiene un mínimo en $x = 2 \Longrightarrow y = \dfrac{4(\pi + 4) - 4\pi}{8} = 2$
Las medidas del rectángulo son 2 m de ancho, 2 m de largo y 1 m el radio de las circunferencias.

Problema 3.3.11 Dada la siguiente función $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 2\ln(x + 1)$

a) Calcule el dominio de $f(x)$.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $x + 1 > 0 \Longrightarrow x > -1 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(f) = (-1, \infty)$.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1} = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ (no vale, está fuera del dominio) y $x = 1$.

	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función decrece en el intervalo $(1, \infty)$ y crece en el intervalo $(-1, 1)$, por tanto, tiene un máximo relativo en $x = 1$.

Problema 3.3.12 Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\, dx$

Solución:

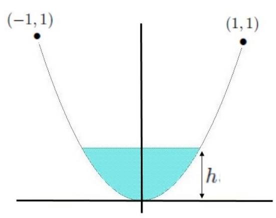
$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int x t e^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int t e^t dt =$$

$$\begin{bmatrix} u = t \Longrightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \Longrightarrow v = e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[t e^t - \int e^t\, dt\right] = \frac{e^t(t - 1)}{2} + C = \frac{e^{x^2}(x^2 - 1)}{2} + C$$

3.4. Asturias

3.4.1. Modelo de 2020

Problema 3.4.1 Se tiene un abrevadero de longitud 6 m y de altura 1 m. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.



a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \dfrac{4h\sqrt{h}}{3}$.

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=$S\times$longitud).

Solución:

a) Los puntos de corte de la parábola y la recta $y = h$:

$$x^2 = h \Longrightarrow x = \pm\sqrt{h}$$

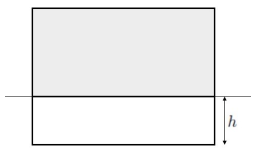
$$S(h) = \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} (h - x^2)\, dx = \left. hx - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} + h\sqrt{h} - \frac{h\sqrt{h}}{3} =$$

$$\frac{2h\sqrt{h}}{3} + \frac{2h\sqrt{h}}{3} = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$$

b) $V(h) = S(h) \times 6 = 8h\sqrt{h} \Longrightarrow V(1) = 8 \Longrightarrow V(h) = 4 \Longrightarrow 8h\sqrt{h} = 4 \Longrightarrow$
$h^{3/2} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow h^3 = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow h = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = 0,62996$ m.

Problema 3.4.2 Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular.

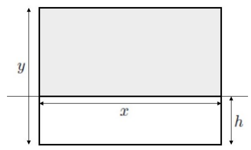
El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible.



Solución:

- El perímetro del cartel es $P(x, y) = 2x + 2y = 20 \Longrightarrow y = 10 - x$
- La altura undida es $h = \dfrac{x}{5}$
- El área que hay que optimizar es

$$S(x) = x(y - h) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = \frac{2x(25 - 3x)}{5}$$



- Optimización:

$$S'(x) = \frac{2(25 - 6x)}{5} = 0 \Longrightarrow x = \frac{25}{6}$$

$$S''(x) = -\frac{12}{5} \Longrightarrow S''\left(\frac{25}{6}\right) = -\frac{12}{5} < 0 \Longrightarrow x = \frac{25}{6} \text{ es un mínimo}$$

Las dimensiones son $x = \dfrac{25}{6} \simeq 4,167$ m de ancho e $y = 10 - \dfrac{25}{6} = \dfrac{35}{6} \simeq 5,833$ m de alto.

3.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.4.3 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función.

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

- Puntos de corte:
  - Con el eje de ordenadas hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
  - Con el eje de abscisas hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$
- Máximos y Mínimos:

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longrightarrow x = 1, \ \ x = 3$$

$$f''(x) = 6(x - 2) \Longrightarrow \begin{cases} f''(1) = -6 < 0 \Longrightarrow \text{Máx}(1, 4) \\ f''(3) = 6 > 0 \Longrightarrow \text{Mín}(3, 0) \end{cases}$$

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 2, \ \ f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(2) = 6 \neq 0 \Longrightarrow PI(2, 2)$$

- En conclusión: hay dos puntos de corte en $(0, 0)$, $(3, 0)$, un máximo relativo en $(1, 4)$, un mínimo relativo en $(3, 0)$ y un punto de inflexión en $(2, 2)$.

b)
- Monotonía:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

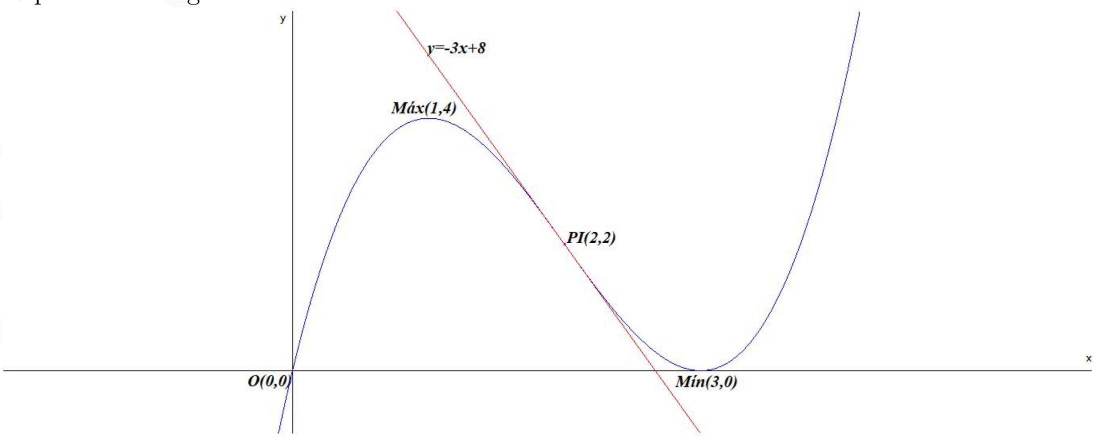
La función crece en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(1, 3)$.

- Curvatura:

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(2, \infty)$.

- Representación gráfica:



c) $b = f(2) = 2$ y $m = f'(2) = -3 \Longrightarrow y - 2 = -3(x - 2) \Longrightarrow y = -3x + 8$

Problema 3.4.4 Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área.

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres.

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0,1)$.

Solución:

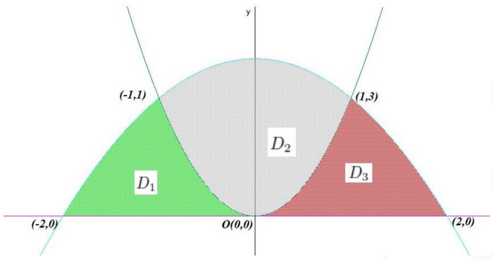
a) $4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

$$S(D) = |A| = \frac{32}{3} \simeq 10,667\ u^2$$

b) Buscamos los puntos de corte entre las dos gráficas:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4 - x^2 = 3x^2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$



c)

$$A = \int_{-1}^{1} (4 - x^2 - 3x^2)\, dx = \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = 4x - \frac{4x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

$$S(D_2) = |A| = \frac{16}{3} \simeq 5,333\ u^2$$

3.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.4.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2x^3+1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2x^3+1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2} - 2x \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3+1-2x^3}{x^2} =$$

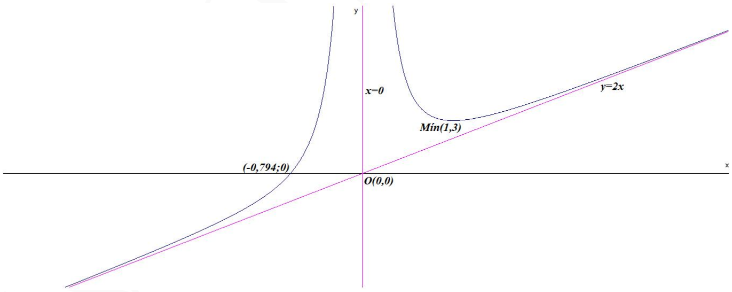
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow y = 2x$$

b) $f'(x) = \dfrac{2(x^3-1)}{x^3} \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 1)$ con un mínimo relativo en el punto $(1, 3)$

c) Grafica:



Problema 3.4.6 Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2}$

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos x - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - e^x - xe^x}{2x + 2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\sin x - e^x - e^x - xe^x}{2 + 2\cos x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

b) $F(x)=\int (x\cos x-e^{-x})\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=\cos x\,dx\Longrightarrow v=\sin x\end{array}\right]=$
$x\sin x-\int \sin x\,dx+e^{-x}=x\sin x+\cos x+e^{-x}+C$
$F(0)=0+1+1+C=3\Longrightarrow C=1$ luego $F(x)=x\sin x+\cos x+e^{-x}+1$

3.5. Cantabria

3.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.5.1 Considera la función $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

a) Calcula la derivada primera.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi$.

c) Calcula las asíntotas.

d) Calcula $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

Solución:

a) $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

b) $m=f'(\pi)=-\dfrac{1}{\pi}$

c) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x=0$ No es asíntota
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x}{1}=1$$
- ☛ Horizontales: $y=0$
$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{\sin x}{x}=0$$
(El seno toma valores siempre finitos $\sin x\in[-1,1]$, mientras que el denominador se hace cada vez más grande $x\longrightarrow\infty$)
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

d) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$

Problema 3.5.2 Considera la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$

a) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Halla una primitiva de $f(x)$.

c) Calcula el área de la región limitada por la función y $f(x)$, las rectas $x=1$, $x=2$ y el eje OX de abscisas.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2}{x^2} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

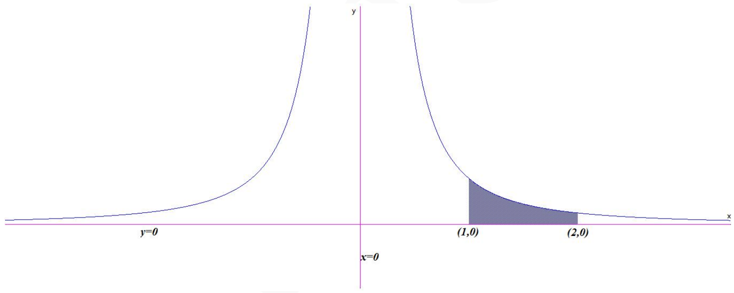
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{2}{x^2}\, dx = \int 2x^{-2}\, dx = \frac{2x^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{x} + C$

c) La función $f(x) \neq 0 \Longrightarrow f$ no corta el eje OX

$$S_1 = \int_1^2 \frac{2}{x^2}\, dx = -\frac{2}{x}\bigg]_1^2 = -\frac{2}{2} + \frac{2}{1} = 1$$

$$S = |S_1| = 1\ u^2$$



3.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.5.3 Considera la función $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

a) Calcula la derivada primera.

b) Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

c) Calcula $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

d) Calcula las asíntotas.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2}$

b) $m = f'(\pi) = -\dfrac{2}{\pi^2}$

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \left[\dfrac{0}{0} \right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0$

d) Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 0$ No es asíntota

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

- ☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

(El coseno toma valores siempre finitos $1 - \cos x \in [0, 2]$, mientras que el denominador se hace cada vez más grande $x \longrightarrow \infty$)

- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Problema 3.5.4 Considera la función $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x \le \pi/2 \\ \frac{2}{x} + a & \text{si} \quad x > \pi/2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

a) Halla a para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcula $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x)$.

c) Halla una primitiva de $f(x)$ para $x \le \pi/2$

d) Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$ y el eje OX de abscisas.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \pi/2^-} \sin x = 1$

$\lim\limits_{x\longrightarrow \pi/2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow \pi/2^+} \dfrac{2}{x} + a = \dfrac{2}{\pi/2} + a \Longrightarrow 1 = \dfrac{4}{\pi} + a \Longrightarrow a = \dfrac{\pi - 4}{\pi}$ y $f(\pi/2) = 1$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2}{x} + a \right) = a$

c) Cuando $x \le \pi/2 \Longrightarrow f(x) = \sin x \Longrightarrow F(x) = \displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C$. Una primitiva puede ser $F(x) = -\cos x + 15$ para $C = 15$.

d) $S_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 0 + 1 = 1$

$$S = |S_1| = 1\ u^2$$

3.6. Castilla La Mancha

3.6.1. Modelo de 2020

Problema 3.6.1 Se pide:

a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2}) = a - b \end{array} \right. \Longrightarrow a + b + 2 = a - b \Longrightarrow b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{x^3} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = \frac{a}{2} + 2b \end{array} \right. \Longrightarrow 2a + b = \frac{a}{2} + 2b \Longrightarrow 3a - 2b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -1 \\ 3a - 2b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow a = -2/3$$

b) La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$, derivable en el intervalo $(-3, 3)$ y $f(3) = f(-3) = 5$. Luego verifica las condiciones del teorema de Rolle y podemos concluir que $\exists c \in [-3, 3]/f'(c) = 0$.

Se puede calcular este punto:
$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 0$ es un mínimo. El punto $c = 0$.

Problema 3.6.2 Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{-e^{x^2-1} - x}{x^2 + 4x + 3}$

Solución:

a) $L = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = e^\lambda$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x}{x-1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2xe^{x-1} - x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2e^{x-1} + 2xe^{x-1} - 2x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow L = e^{1/2}$$

b) $\lim_{x\longrightarrow -1} \dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow -1} \dfrac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4} = \dfrac{1}{2}$

Problema 3.6.3 Se pide:

a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2+2x+3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$.

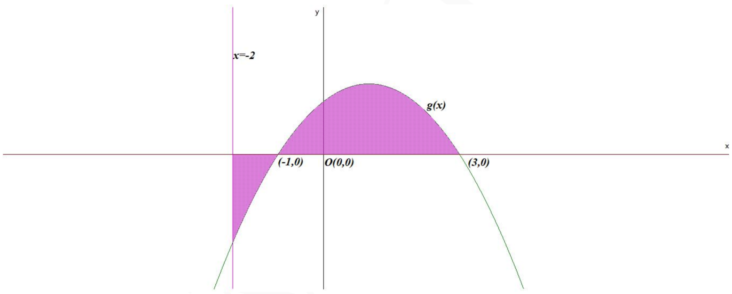
Solución:

a) $g(x) = -x^2+2x+3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$. Luego tenemos dos recintos: S_1 en el intervalo $[-2,-1]$ y otro S_2 en el intervalo $[-1,3]$.

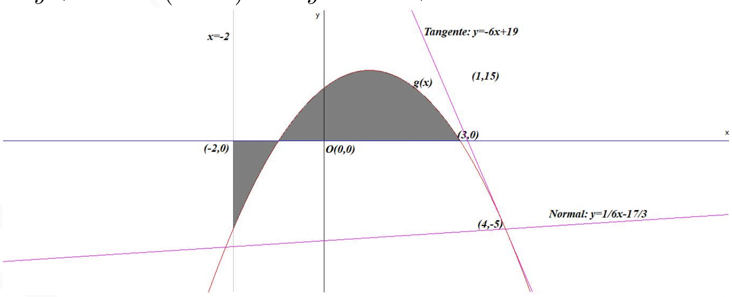
$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (-x^2+2x+3)\,dx = -\frac{x^3}{3}+x^2+3x\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{7}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)\,dx = -\frac{x^3}{3}+x^2+3x\Big]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13\ u^2$$



b) $b = g(4) = -5$, $g'(x) = -2x+2 \Longrightarrow m = g'(4) = -6$. Luego la ecuación de la recta tangente es $y+5 = -6(x-4) \Longrightarrow y = -6x+19$



La recta normal tiene de ecuación $y+5 = \dfrac{1}{6}(x-4) \Longrightarrow y = \dfrac{1}{6}x - \dfrac{17}{3}$

3.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.6.4 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos x^2}$

Solución:

a) Las tres ramas son continuas en el dominio de la función, estudiamos en $x = 2$ y en $x = 3$.
♣ Continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{3}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \cos(\pi x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

En este caso los límites laterales no coinciden y la función es discontinua no evitable (hay un salto)
♣ Continuidad en $x = 3$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} \cos(\pi x) = -1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} \ln(x-2)3 - x = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} 1/(x-2) - 1 = -1 \\ f(3) = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

En este caso los límites laterales coinciden y con el valor de la función en $x = 3 \Longrightarrow$ la función es continua.
♣ En conclusión f es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^{-x} - xe^{-x}}{2+2x\sin x^2} = \dfrac{1}{2}$

Problema 3.6.5 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

a) Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

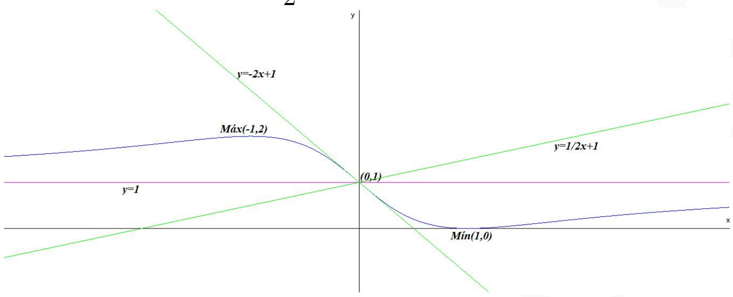
Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, 0)$. Estos extremos, como se puede ver en la gráfica, son absolutos.

b) $b = f(0) = 1$ y $m = f'(0) = -2 \Longrightarrow y - 1 = -2(x - 0) \Longrightarrow y = -2x + 1$ sería la recta tangente.
La recta normal es $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.



Problema 3.6.6 Se pide:

a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$

b) Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Solución:

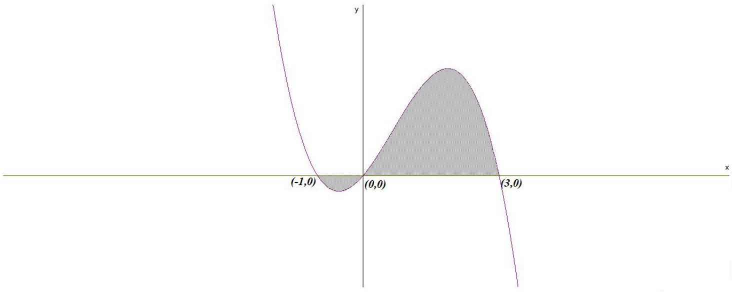
a) $$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} \frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \\ 3x-2 = A(x-1)+B \\ x = 0 \Longrightarrow -2 = -A + B \\ x = 1 \Longrightarrow 1 = B \Longrightarrow A = 3 \end{array}\right] =$$
$$\int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

b) Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas: $g(x) = -x^3+2x^2+3x = 0 \Longrightarrow x = -1$, $x = 0$ y $x = 3$. Luego habrá dos recintos:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_{-1}^{0} = -\frac{7}{12}$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (-x^3 + 2x^2 + 3x)\,dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_{0}^{3} = \frac{45}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \simeq 11,83\ u^2$$



3.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.6.7 Se pide:

a) Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin 2x}\right)$

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2^{x-1} & \text{si} \quad x\le 1\\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2\\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$ Donde ln es el logaritmo, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin 2x}\right)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin 2x-x}{x\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{2\cos 2x-1}{\sin 2x+2x\cos 2x}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$

b) ♣ Continuidad en $x=1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-} 2^{x-1}=1\\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}(x-2)=-1\end{cases}\Longrightarrow$$

En este caso los límites laterales no coinciden y la función es discontinua no evitable (hay un salto).
♣ Continuidad en $x=2$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-} x-2=0\\ \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^+}\ln(x-1)=0\\ f(2)=0\end{cases}\Longrightarrow$$

En este caso los límites laterales coinciden y la función es continua.
♣ En conclusión f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$

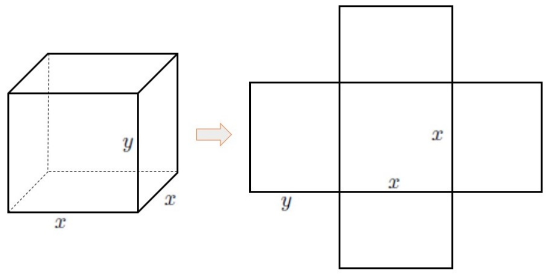
Problema 3.6.8 Se pide:

a) Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) Tendríamos:



✎ $V(x, y) = x^2y = 108 \Longrightarrow y = \dfrac{108}{x^2}$

✎ $S(x, y) = x^2 + 4xy \Longrightarrow S(x) = x^2 + \dfrac{432}{x} = \dfrac{x^3 + 432}{x}$

✎ $S'(x) = \dfrac{2(x^3 - 216)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 6$

	$(-\infty, 6)$	$(6, \infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

✎ Luego $x = 6$ dm es un mínimo e $y = \dfrac{108}{36} = 3$ dm

b) Tenemos $b = f(1) = 1$ y $f'(x) = 2x+1 \Longrightarrow m = f'(1) = 3 \Longrightarrow y-1 = 3(x-1) \Longrightarrow y = 3x-2$

Problema 3.6.9 Se pide:

a) Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$
(Cambio de variable sugerido: $t = e^x$)

b) Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Solución:

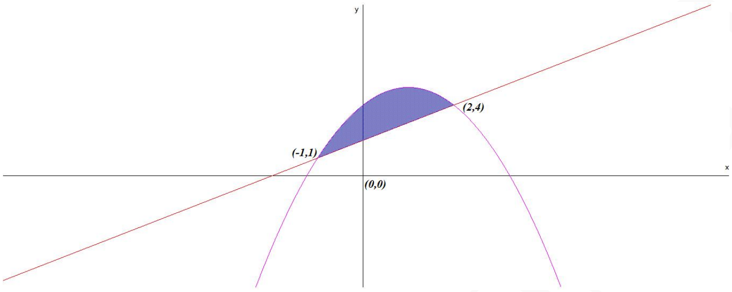
a) $$\int \frac{-dx}{1+e^x} = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)} \\ 1 = A(1+t) + Bt \\ t = 0 \Longrightarrow 1 = A \\ t = -1 \Longrightarrow 1 = -B \Longrightarrow B = -1 \end{bmatrix}$$
$$= -\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln|1+t| - \ln|t| + C = \ln|1+e^x| - \ln|e^x| + C = -x + \ln|1+e^x| + C$$

b) Calculamos los puntos de corte de ambas gráficas:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 2x + 4 = x + 2 \Longrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2} = 4,5\ u^2$$



3.7. Castilla León

3.7.1. Modelo de 2020

Problema 3.7.1 Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados)

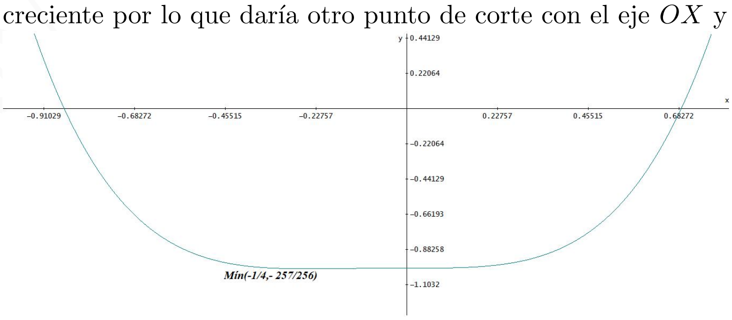
Solución:

☛ $f'(x) = 12x^3 + 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ y $x = 0$.

	$(-\infty, -1/4)$	$(-1/4, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1/4)$ y crece en $(-1/4, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(-1/4, -257/256)$.

☛ La función no tiene asíntotas horizontales y decrece hasta el mínimo en $(-1/4, -257/256)$ lo que daría un punto de corte con el eje OX. A partir de ese mínimo la función es siempre creciente por lo que daría otro punto de corte con el eje OX y no habría más.



Problema 3.7.2 Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Asíntotas:
  - Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
  - Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} xe^{-x} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$$

  - Oblicuas: Cuando $x \longrightarrow +\infty$ hay asíntota horizontal y, por tanto, no hay oblicua. Cuando $x \longrightarrow -\infty$:

$$m = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} e^{-x} = e^{\infty} = \infty$$

    Luego no hay oblicuas.

- $f'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0 \Longrightarrow x = 1$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

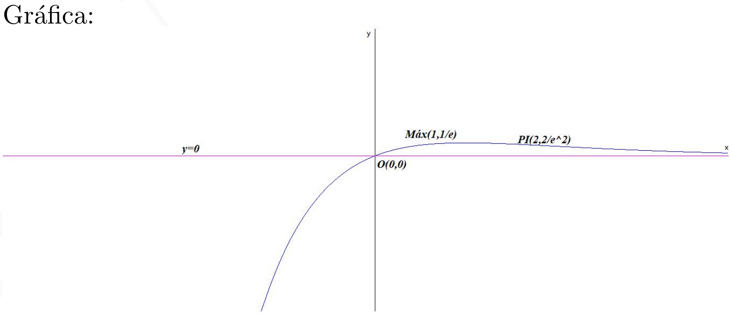
La función crece en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(1, 1/e)$.

- $f''(x) = e^{-x}(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 2$.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(2, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(2, 2/e^2)$

- Gráfica:



Problema 3.7.3 Dada la función $f(x) = x\cos x$

a) Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

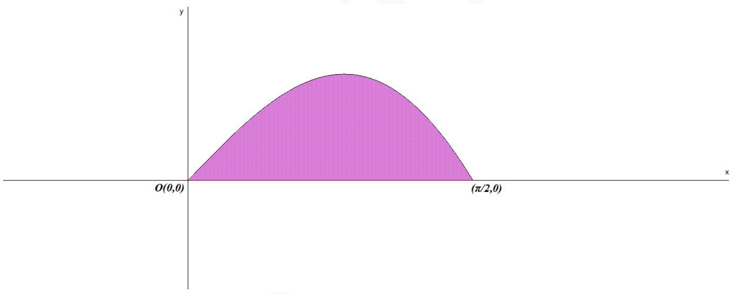
b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

a) $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$ luego la curva no corta con el eje de abscisas en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y, por tanto, el signo de la función en este intervalo es el mismo para todos sus puntos. Si probamos con uno de ellos, por ejemplo $x = \frac{\pi}{3} \Longrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} > 0$. Luego f en este intervalo es positiva.

b) $F(x) = \displaystyle\int x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array}\right] = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$

$$S = \int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 1 = 0,5708\ u^2$$



Problema 3.7.4 Se pide:

a) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)}$

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1/(x+1)} = \lim_{x\longrightarrow 0}[(x+1)(e^x + \sin x)] = 1$

b) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ dx = xdt \end{array}\right] = \int \frac{t^2}{x} xdt = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$

3.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.7.5 Representar gráficamente la función $f(x) = xe^x$, calculando previamente sus extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y sus asíntotas.

Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- Asíntotas:
  - Verticales: No hay, no hay discontinuidades.
  - Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} xe^x = \infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} xe^x = \lim_{t\longrightarrow \infty}(-te^{-t}) = \lim_{t\longrightarrow \infty}\frac{-t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{t\longrightarrow \infty}\frac{-1}{-e^t} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
  - Oblicuas: Cuando $x \longrightarrow -\infty$ hay asíntota horizontal y, por tanto, no hay oblicua. Cuando $x \longrightarrow \infty$:
$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} e^x = e^{\infty} = \infty$$
    Luego no hay oblicuas.
- $f'(x) = e^x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

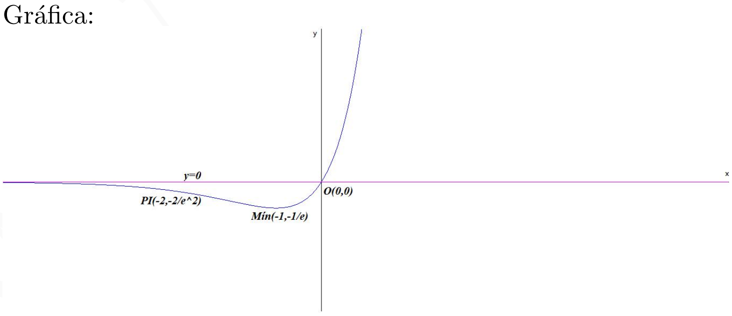
La función decrece en el intervalo $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, +\infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(-1, -1/e)$.

- $f''(x) = e^x(x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, -2)$ y cóncava ($\smile$) en el intervalo $(-2, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(-2, -2/e^2)$

- Gráfica:



Problema 3.7.6 Demuestre que la ecuación $x^3 - 12x = -2$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$ y pruebe además que esa solución es única.
Solución:

- La función $f(x) = x^3 - 12x + 2$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y, por tanto lo es en el intervalo $[-2, 2]$. Además $f(-2) = 18$ y $f(2) = -14$ cambia de signo en los extremos del intervalo. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in [-2, 2]/f(c) = 0 \Longrightarrow c$ cumple $c^3 - 12c + 2 = 0$. Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en todo el intervalo $[-2, 2]$ luego sólo puede haber un punto de corte en este intervalo. Es decir, el punto c que cumple $f(c) = 0$ es único en este intervalo.

Problema 3.7.7 Se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1}$

b) Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\, dx$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - \cos x - x}{e^x + \sin x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x + \sin x - 1}{e^x + \cos x} = 0$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\, dx = -\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = 0 + 1 - (-1 + 0) = 2$

Problema 3.7.8 Se pide:

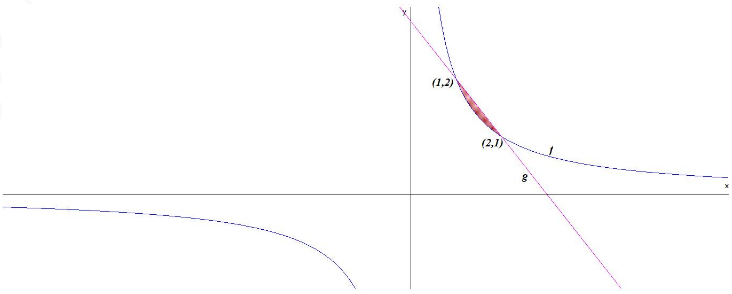
a) Calcule los puntos de corte de las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$

b) Sabiendo que en el intervalo $[1, 2]$ se verifica que $g(x) \geq f(x)$ calcular el área del recinto limitado por la gráfica de ambas funciones en dicho intervalo.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow \dfrac{2}{x} = 3 - x \Longrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 2$.

b) $S = \displaystyle\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln|x|\Big]_1^2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \simeq 0{,}1137\ u^2$



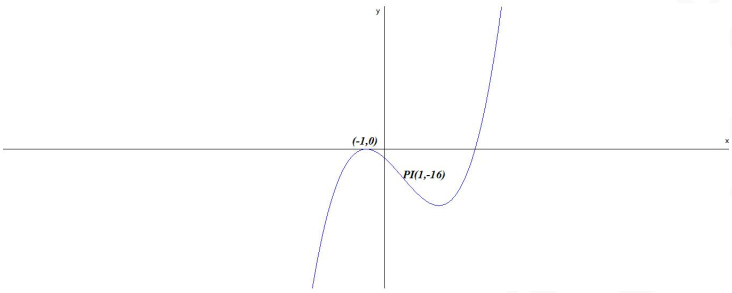
3.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.7.9 Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas.
Solución:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1) = 0 \Longrightarrow -1 + a - b + c = 0 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6 + 2a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = -9 \\ c = -5 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$



Problema 3.7.10 Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \sin x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única.
Solución:

- ☛ La función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \sin x = 0$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una composición de dos funciones continuas, un polinomio y un seno, por tanto lo es en el intervalo $[0, 2]$. Además $f(0) = -1$ y $f(2) = 20,09$ cambia de signo en los extremos del intervalo. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in [0, 2]/f(c) = 0 \Longrightarrow c$ cumple $c^4 + 3c - 1 - \sin c = 0$.

- ☛ Tenemos $f'(x) = 4x^3 + 3 - \cos x > 0\ \forall x \in [0, 2] \Longrightarrow f$ la función es creciente en todo el intervalo $[0, 2]$ luego sólo puede haber un punto de corte en este intervalo. Es decir, el punto c que cumple $f(c) = 0$ es único en este intervalo.

Problema 3.7.11 Se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$

b) Dada la función $f(x) = \dfrac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} = \dfrac{1}{2}$

b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 + e^{-x} \\ dt = (2x - e^{-x})dx \\ dx = \frac{dt}{2x - e^{-x}} \end{array}\right] = \displaystyle\int \frac{2x - e^{-x}}{t} \cdot \frac{dt}{2x - e^{-x}} =$
$\displaystyle\int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|x^2 + e^{-x}| + C$
$F(0) = \ln 1 + C = C = 3 \Longrightarrow F(x) = \ln|x^2 + e^{-x}| + 3$

Problema 3.7.12 Se pide:

a) Dada la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

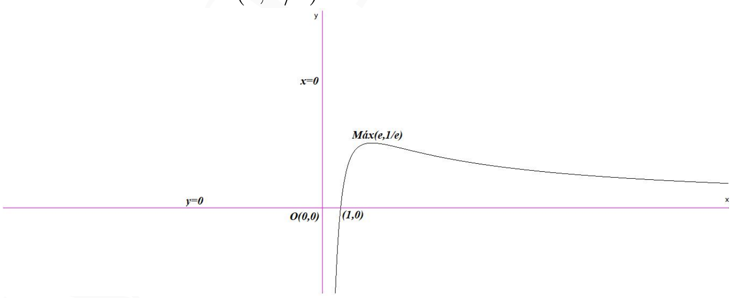
Solución:

a) Tenemos $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Longrightarrow \ln x = 1 \Longrightarrow x = e$$

	$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, e)$ y decreciente en el intervalo (e, ∞), con un máximo relativo en $(e, 1/e)$.

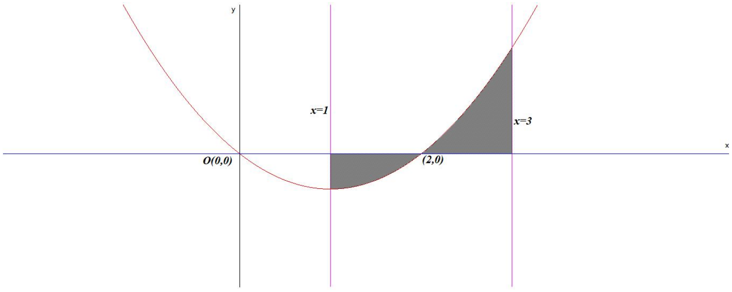


b) Comprobamos si la función corta el eje de abscisas en algún punto del intervalo $[1, 3]$: $f(x) = x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2 \in [1, 3] \Longrightarrow$ hay dos recintos.

$$S_1 = \int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2 = -\frac{2}{3}$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2\ u^2$$



3.8. Cataluña

3.8.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.8.1 Trazamos la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$ por el punto $P(a, f(a))$ del primer cuadrante. Esta recta junto con los ejes de coordenadas forma un triángulo.

a) Compruebe que el área de este triángulo, en función de a, viene dada por la función

$$g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{a^2}$$

b) En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule este valor mínimo.

Solución:

a) El punto $P\left(a, \dfrac{1}{a^2} + 1\right)$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} \Longrightarrow m(a) = f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$

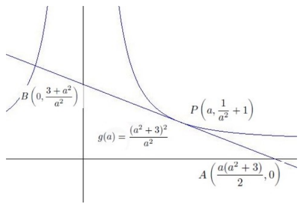
La recta tangente en P es: $y - \left(\dfrac{1}{a^2} + 1\right) = -\dfrac{2}{a^3}(x-a) \Longrightarrow y = -\dfrac{2}{a^3}x + \dfrac{3}{a^2} + 1$

Esta recta corta con el eje OY: (hacemos $x = 0$) en $B\left(0, \dfrac{3+a^2}{a^2}\right)$

Esta recta corta con el eje OX: (hacemos $y = 0$) en $A\left(\dfrac{a(a^2+3)}{2}, 0\right)$

El área del triángulo que se forma por esta recta y los ejes de coordenadas es

$$g(a) = \frac{\dfrac{a(a^2+3)}{2} \cdot \dfrac{3+a^2}{a^2}}{2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$$



b) $g'(a) = \dfrac{3(a^2-1)(a^2+3)}{4a^2} = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$ sólo es válida la solución positiva al tratarse del primer cuadrante.

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$g'(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

Hay un mínimo relativo para $a = 1$ en el punto $P(1, 2)$ con un área $g(1) = 4\ u^2$

Problema 3.8.2 Considere la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x}$. En la que a y b son dos parámetros reales. Calcular los valores de a y b de modo que la función $f(x)$ tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 2$.

Solución:

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{ax^2 + b}{x^1} = a = 1$$

$$f'(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2},\ \ f'(2) = \frac{4a - b}{4} = 0 \Longrightarrow 4a - b = 0 \Longrightarrow b = 4$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} \Longrightarrow f''(x) = \frac{8}{x^3} \Longrightarrow f''(2) = 1 > 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ es un mínimo}$$

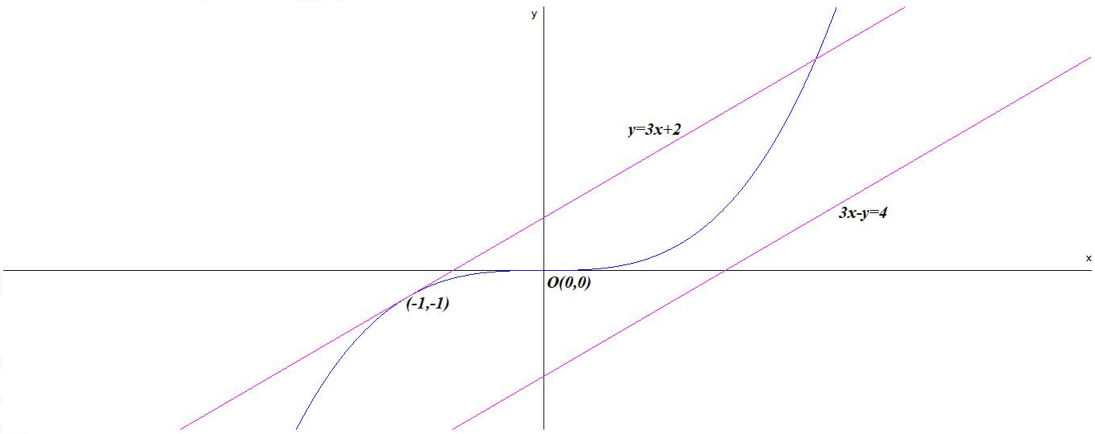
Problema 3.8.3 Considere la función $f(x) = x^3$.

a) Calcula en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $3x - y = 4$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica en este punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y las dos rectas.

b) Calcula el área de la región delimitada por $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 3a^3 = 3 \Longrightarrow a = \pm 1$ la solución positiva no vale por tratarse del tercer cuadrante. Luego el punto de tangencia $(a, f(a)) = (-1, -1) \Longrightarrow y + 1 = 3(x + 1) \Longrightarrow y = 3x + 2$

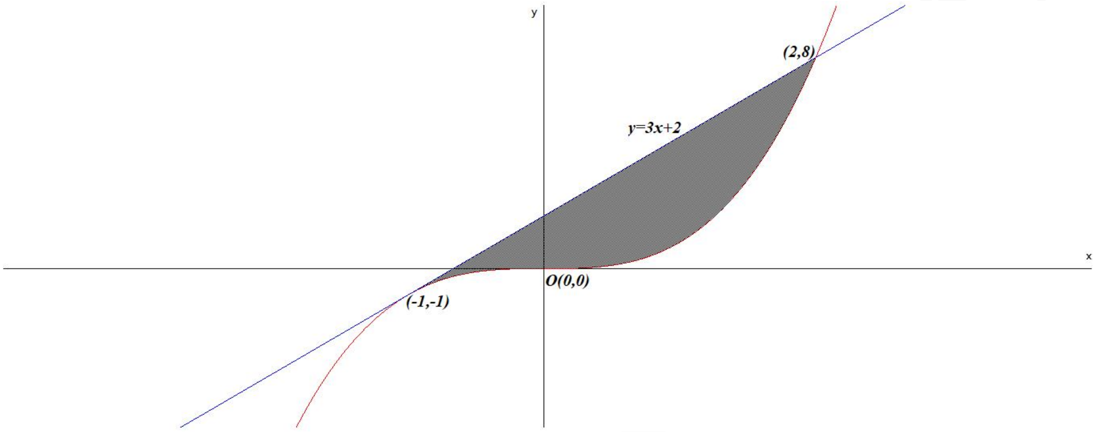


b) Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas:

$$x^3 = 3x + 2 \Longrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1,\ \ x = 2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x - 2)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\Big]_{-1}^{2} = -\frac{27}{4}$$

$$S = |S_1| = \frac{27}{4} \simeq 6,75\ u^2$$



3.8.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

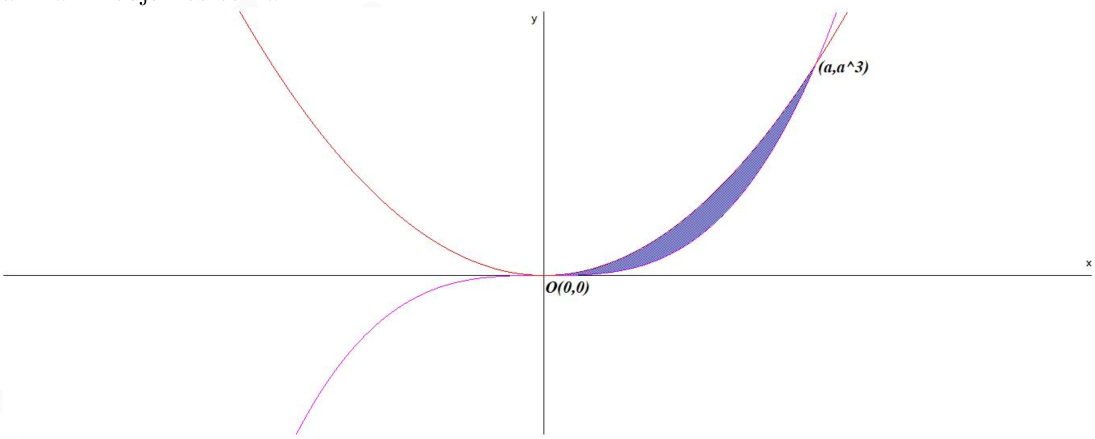
Problema 3.8.4 Sean las funciones $f(x) = x^3$ e $g(x) = ax^2$, en la que a es un número real positivo.

a) Busque, en función del parámetro a, los puntos de corte entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas.

b) Calcula el valor de a para el área comprendida entre $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sea $\frac{27}{4}\ u^2$.

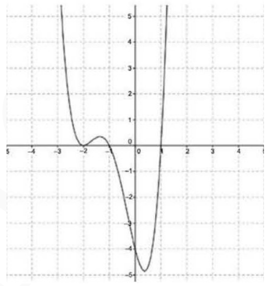
Solución:

a) Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 = ax^2 \Longrightarrow x = 0$ y $x = a$. Dibujamos con $a = 2$:



b) $S = \int_0^a (ax^2 - x^3)\, dx = \left.\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \Longrightarrow a = \pm 3$

Problema 3.8.5 Sea $f(x)$ una función derivable, su gráfica pasa por el punto $(0, 1)$. La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura.



a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$.

b) Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasificadlas.

Solución:

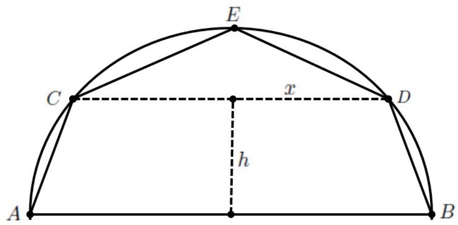
a) Observando la gráfica de $f'(x)$ tenemos $m = f'(0) = -4$ y como pasa por el punto $(0, 1) \Longrightarrow y - 1 = -4(x - 0) \Longrightarrow y = -4x + 1$.

b) La función $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -2$, $x = -1$ y $x = 1$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

En $x = -2$ la función pasa de crecer a seguir creciendo y no es un extremo. Sería un punto de inflexión.
En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer y se trata de un máximo relativo.
En $x = 1$ la función pasa de decrecer a crecer y se trata de un mínimo relativo.

Problema 3.8.6 Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando después una cuerda CD paralela al diámetro AB e incorporando el punto E en el punto medio del arco CD. De esta manera queda trazado el pentágono $ACEDB$, tal como se muestra en la figura.



a) Expresar en función de x y h el área del pentágono $ACEDB$

b) ¿Cuál debe ser la distancia (indicada en la figura por h) a que debe situarse la cuerda CD de AB para que el área del pentágono $ACEDB$ sea máxima?

Solución:

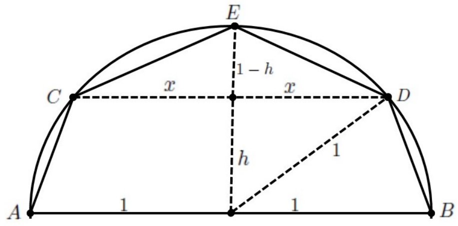
a) El pentágono $ACEDB$ está compuesto por un trapecio $ACDB$ y un triángulo CED.
Área del trapecio$= \dfrac{(AB + CD)h}{2} = \dfrac{(2 + 2x)h}{2} = (1 + x)h$
Área del triángulo$= \dfrac{CD(1 - h)}{2} = \dfrac{2x(1 - h)}{2} = x(1 - h)$
Área del pentágono$= (1 + x)h + x(1 - h) = h + hx + x - hx = h + x$

$$S(x, h) = h + x$$

b) Tenemos $x^2 + h^2 = 1 \Longrightarrow h = \sqrt{1-x^2}$, luego:

$$S(x) = x + \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$



Luego $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u es un máximo.

Como $h = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u.

Con un área de $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ u^2.

3.9. Comunidad valenciana

3.9.1. Modelo de 2020

Problema 3.9.1 Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de la función h Los límites $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow} h(x)$.

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$.

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)\,dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 5$ y la curva $y = h(x)$.

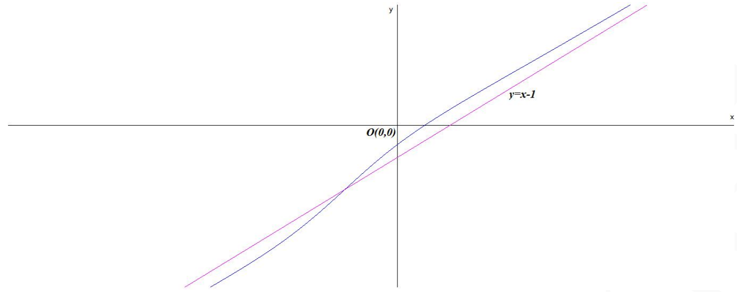
Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, el denominador no se anula nunca.
$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x = +\infty$
$\lim\limits_{x\longrightarrow} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = -\frac{3}{5}$

b) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay
- **Horizontales:** No hay
- **Oblicuas:** $y = mx + n$
  $m = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = 1$
  $n = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x\right) =$
  $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5}\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{-x^2-3}{x^2+2x+5} = -1$

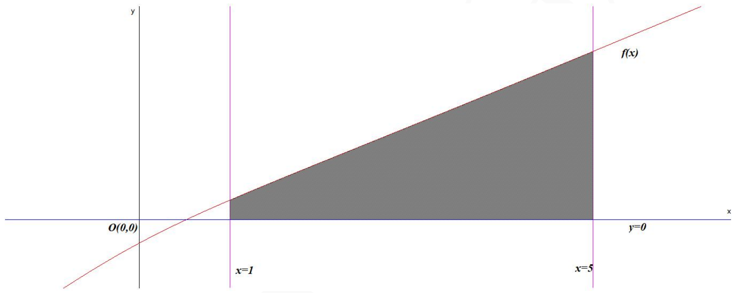
$$y = x - 1$$



c) $h(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = x - 1 + \dfrac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}$. Luego:

$$S = \int_1^5 h(x)\,dx = \int_1^5 \left(x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2 + 2x + 5| \Big]_1^5 =$$

$$8 + \ln 5 \ u^2 \simeq 9,61 \ u^2$$



Problema 3.9.2 Un proyectil está unido al punto $(0, 2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0, 2)$.

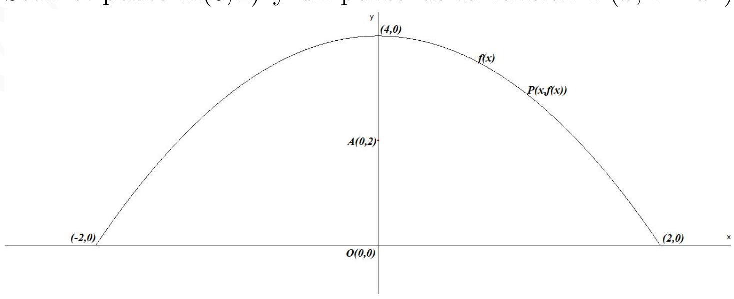
b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$.

Solución:

a) Sean el punto $A(0, 2)$ y un punto de la función $P(x, 4 - x^2)$. LLamamos $d(x) = d(AP)$:



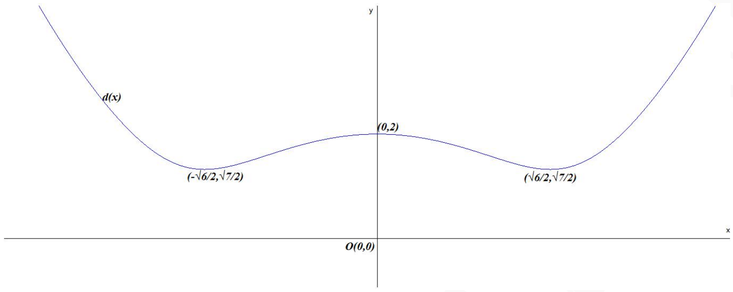
$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

b)

$$d'(x) = \frac{x(2x^2-3)}{\sqrt{x^4-3x^2+4}} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

	$(-\infty, -\sqrt{6}/2)$	$(-\sqrt{6}/2, 0)$	$(0, \sqrt{6}/2)$	$(\sqrt{6}/2, \infty)$
$d'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$d(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{6}/2) \cup (0, \sqrt{6}/2)$ y creciente en el intervalo $(-\sqrt{6}/2, 0) \cup (\sqrt{6}/2, \infty)$. La función presenta dos mínimos relativo en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ y tendría el máximo en $(0, 2)$.

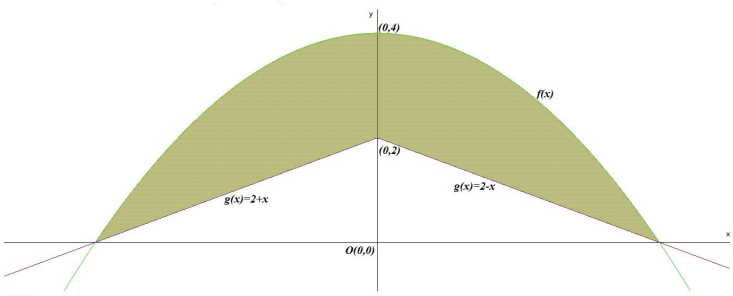


c) Contestado en el apartado anterior.

d)

$$S = \int_{-2}^{0} (4-x^2-2-x)\,dx + \int_{0}^{2} (4-x^2-2+x)\,dx = \int_{-2}^{0} (-x^2-x+2)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^2+x+2)\,dx =$$

$$-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\bigg]_{-2}^{0} + -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\bigg]_{-2}^{0} = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}\ u^2$$



3.9.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.9.3 Se da la función real f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de f.

b) La integral $\int f(x)\,dx$, así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,0)$.

c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0,1\}$.
Asíntotas:

☛ **Verticales:**

- $x=0$:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

- $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\left[\frac{2}{0^+}\right]=+\infty$$

☛ **Horizontales:** $y=0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=0$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

b)
$$F(x)=\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx=\left[\begin{array}{c}\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A(x(x-1))+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}\\ x^2+1=A(x(x-1))+B(x-1)+Cx^2\\ x=0\Longrightarrow 1=-B\Longrightarrow B=-1\\ x=1\Longrightarrow 2=C\Longrightarrow C=2\\ x=2\Longrightarrow 5=2A+B+4C\Longrightarrow A=-1\\ \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\end{array}\right]=$$

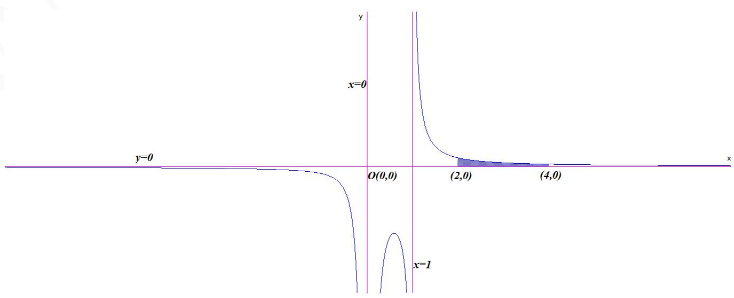
$$\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=-\ln|x|-\frac{x^{-1}}{-1}+2\ln|x-1|+C=\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C$$

$$F(2)=\frac{1}{2}-\ln|2|+2\ln|2-1|+C=0\Longrightarrow C=\ln 2-\frac{1}{2}\Longrightarrow F(x)=\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|+C+\ln 2-\frac{1}{2}$$

c) La función no corta el eje de abscisas en ningún momento, por lo que la función no tiene puntos de corte dentro del intervalo $[2,4]$ y tenemos sólo un recinto:

$$S_1=\int_2^4\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx=\left.\frac{1}{x}-\ln|x|+2\ln|x-1|\right]_2^4=-\frac{1}{4}+\ln\frac{9}{2}$$

$$S=|S_1|=-\frac{1}{4}+\ln\frac{9}{2}\simeq 1,2541\ u^2$$



Problema 3.9.4 En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.

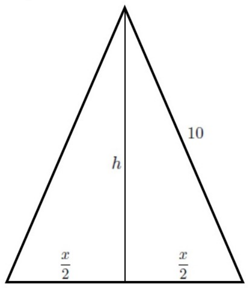
b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \le x \le 20$.

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Solución:

a) $10^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Longrightarrow h = \sqrt{100 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{400 - x^2}}{2}$.
El área del triángulo es:

$$A(x) = \frac{xh}{2} = \frac{x\sqrt{400 - x^2}}{4}$$



b)

$$A'(x) = \frac{200 - x^2}{2\sqrt{400 - x^2}} = 0 \Longrightarrow x = 10\sqrt{2}$$

	$(0, 10\sqrt{2})$	$(10\sqrt{2}, 20)$
$A'(x)$	$+$	$-$
$A(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $[0, 10\sqrt{2})$ y decrece en el intervalo $(10\sqrt{2}, 20]$. Luego hay un máximo cuando $x = 10\sqrt{2}$ cm

c) La longitud de $x = 10\sqrt{2}$ cm y el área buscada es $A(10\sqrt{2}) = \dfrac{10\sqrt{2}\sqrt{400 - 200}}{4} = 50$ cm^2.

3.9.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.9.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

c) El valor de $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ Asíntotas:

☛ **Verticales:**

- $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left[\frac{-1}{\sqrt{0^-}}\right] \Longrightarrow \nexists \text{límite}$$

- $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{1}{\sqrt{0^-}}\right] \Longrightarrow \nexists \text{límite}, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ **Horizontales:** $y = 1$

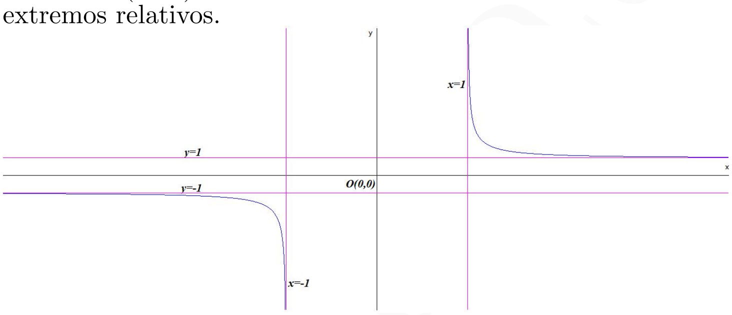
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

$y = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = -1$$

☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}} \neq 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio y no tiene extremos relativos.



c) $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{bmatrix} t = x^2-1 \\ dt = 2xdx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{bmatrix} = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2} + C =$
$t^{1/2} + C = \sqrt{x^2-1} + C$
$\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - F(2) = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$

Problema 3.9.6 Los vértices de un triángulo son $A(0,12)$, $B(-5,0)$ y $C(5,0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x,0)$ y $(x,0)$, siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior.

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo.

Solución:

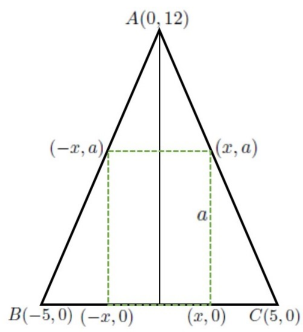
a) Calculamos la ecuación de una recta r que pase por los puntos A y C

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (0,12)) - (5,0) = (-5,12) \\ C(5,0) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{x-5}{-5} = \frac{y-0}{12} \Longrightarrow y = -\frac{12}{5}x + 12$$

Un punto de esta recta es $(x, a) = \left(x, -\frac{12}{5}x + 12\right)$. El área del rectángulo inscrito en el triángulo será

$$f(x) = 2x \cdot \left(-\frac{12}{5}x + 12\right) = -\frac{24}{5}x^2 + 24x$$



b) $f'(x) = -\frac{48}{5}x + 24 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$

	$(0, 5/2)$	$(5/2, 5)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ y la función es decreciente en el intervalo $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$. Luego $x = \frac{5}{2}$ es un máximo.
La base del rectángulo es $2x = 5\ u$
La altura del rectángulo es $a = -\frac{12}{5} \cdot \frac{5}{2} + 12 = 6\ u$
El área del rectángulo es $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{24}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 24\left(\frac{5}{2}\right) = 30\ u^2$

c) El área del triángulo es $\frac{10 \cdot 12}{2} = 60\ u^2$. El área del rectángulo es la mitad del triángulo.

3.10. Extremadura

3.10.1. Modelo de 2020

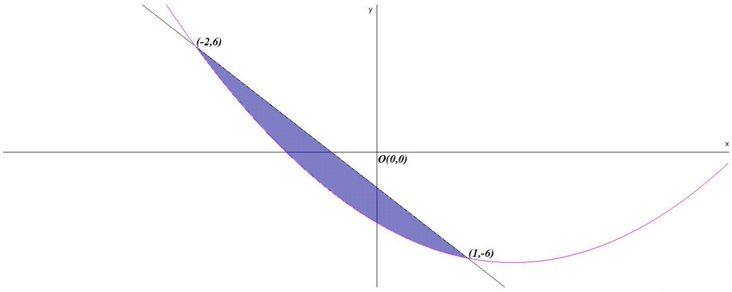
Problema 3.10.1 Sean las funciones $f(x) = -4x - 2$ y $g(x) = x^2 - 3x - 4$

a) Represente de forma aproximada el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de dicho recinto con la integral apropiada.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow -4x - 2 = x^2 - 3x - 4 \Longrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$
Dando valores dibujamos las gráficas:



b) $S_1 = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right)\, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$

$S = |S_1| = \frac{9}{2} = 4,5\ u^2$

Problema 3.10.2 Calcular una primitiva de la función $f(x) = x^2 \ln x$, que se anule en $x = 1$.

Solución:

$$F(x) = \int x^2 \ln x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \Longrightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right] = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\, dx =$$

$$\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C = \frac{3x^3 \ln x - x^3}{9} + C = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{9} + C$$

$$F(1) = -\frac{1}{9} + C = 0 \Longrightarrow C = \frac{1}{9} \Longrightarrow F(x) = \frac{x^3(3\ln x - 1) + 1}{9}$$

Problema 3.10.3 Calcular asíntotas, extremos relativos y represente gráficamente $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Solución:

Tenemos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

♣ Asíntotas:

☛ **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

☛ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

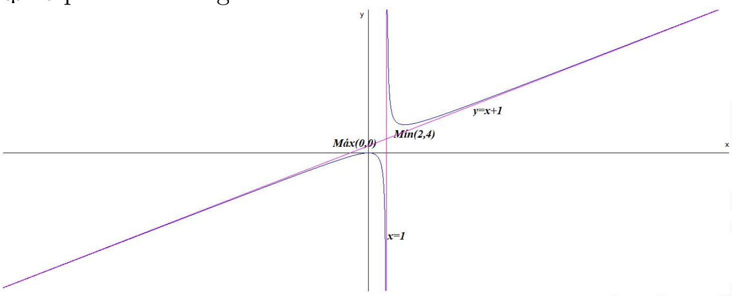
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$$y = x + 1$$

♣ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x=0$ y $x=2$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0,1)\cup(1,2)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(0,0)$ y un mínimo relativo en el punto $(2,4)$.
♣ Representación gráfica:



Problema 3.10.4 Calcular a y b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo el dominio y hallar la función derivada:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{si} \quad x<1 \\ b+\ln x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Solución:
Para que sea derivable tiene que ser continua en $x=1$:

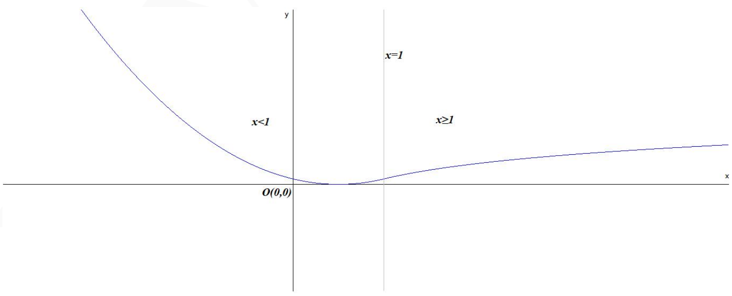
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}(x-a)^2 = (1-a)^2; \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}(b+\ln x) = b \Longrightarrow (1-a)^2 = b$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-a) & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases} \Longrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow 2(1-a) = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Luego $\begin{cases} a = 1/2 \\ (1-a)^2 = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/4 \end{cases}$ y la función quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{1}{4}+\ln x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



3.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.10.5 Se pide:

a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$

Solución:

a) $f'(x) = xe^x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-1, 0)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 3/e)$ y un mínimo relativo en el punto $(0, 1)$.

b) $g(x) = e^x(x^2 - x + 1) - 2$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, lo es en cualquier intervalo. Buscamos un intervalo en cuyos extremos la función cambia de signo, por ejemplo $[0, 1]$: $g(0) = -1 < 0$ y $g(1) = e - 2 > 0 \Longrightarrow g$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano por lo que $\exists c \in [0, 1]/g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - 2 = 0 \Longrightarrow f(c) = 2$

Problema 3.10.6 Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

Solución:

a) Continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = -1, \quad f(0) = a \Longrightarrow a = -1$$

b) $b = f(1) = 1 - e$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x) - 1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -1 \Longrightarrow$
$y - 1 + e = -(x - 1) \Longrightarrow y = -x + 2 - e$

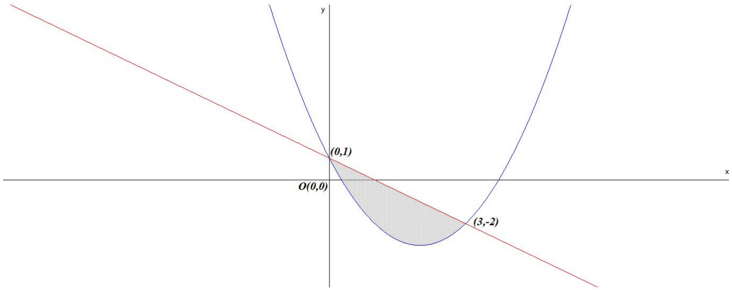
Problema 3.10.7 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas.

b) Calcule el área de dicha región.

Solución:

a) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 1 = -x + 1 \Longrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3$
Dando valores dibujamos



b) $S_1 = \displaystyle\int_0^3 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -\frac{9}{2}$

$$S = |S_1| = \frac{9}{2} = 4,5\ u^2$$

Problema 3.10.8 Resuelva la integral

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\, dx$$

Solución:

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^2+x-2=0 \Longrightarrow x=1,\ \ x=-2 \\ \frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ -x+7 = A(x+2)+B(x-1) \\ x=-2 \Longrightarrow 9=-3B \Longrightarrow B=-3 \\ x=1 \Longrightarrow 6=3A \Longrightarrow A=2 \\ \frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+3} \end{array} \right] =$$

$$2\int \frac{1}{x-1}\, dx - 3\int \frac{1}{x+2}\, dx = 2\ln|x-1| - 3\ln|x+2| + C$$

3.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.10.9 Sea la función $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$.

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$.

Solución:

a) Es una función impar, con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y punto de corte en $(0, 0)$.
♣ Asíntotas:

- ☛ **Verticales:** No hay, el denominador no se puede anular.

☛ **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0$$

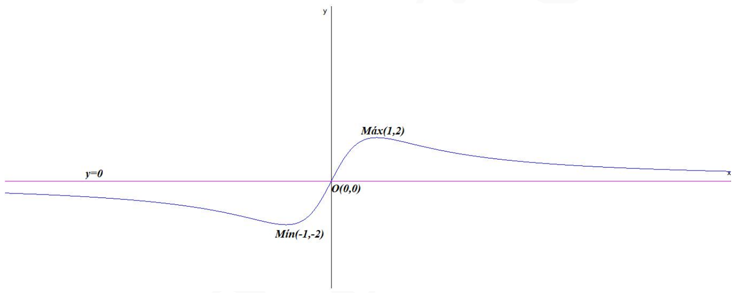
☛ **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

♣ Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.
La función es creciente en el intervalo $(-1,1)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(1,2)$ y un mínimo relativo en el punto $(-1,-2)$.

b) Representación gráfica:



Problema 3.10.10 Calcule los valores de a y b sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+ax+b & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2+\ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Solución:
Para que sea derivable tiene que ser continua en $x = 1$:

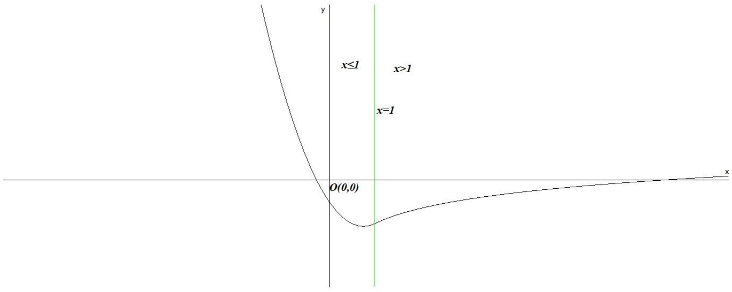
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}(2x^2+ax+b) = a+b+2; \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+}(-2+\ln x) = -2 \Longrightarrow a+b+2 = -2 \Longrightarrow a+b = -4$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+a & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow 4+a = 1 \Longrightarrow a = -3$$

Luego $\begin{cases} a = -3 \\ a+b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$ y la función quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-3x-1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2+\ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$



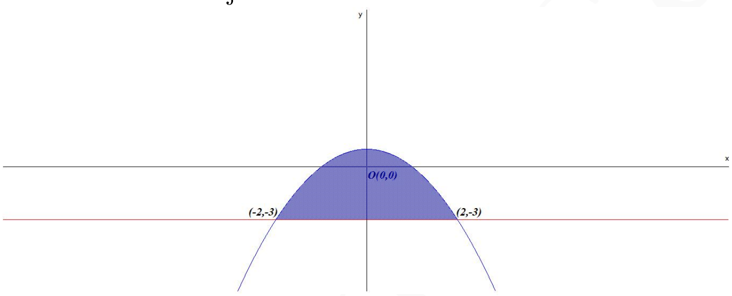
Problema 3.10.11 Dadas las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de la región anterior.

Solución:

a) $1 - x^2 = -3 \Longrightarrow x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2$
Dando valores dibujamos



b) $S_1 = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}\ u^2$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3} \simeq 10,667\ u^2$$

Problema 3.10.12 Calcule la integral

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\, dx$$

Solución:

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1, \ \ x = 2 \\ \frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ 3x = A(x-2) + B(x+1) \\ x = 2 \Longrightarrow 6 = 3B \Longrightarrow B = 2 \\ x = -1 \Longrightarrow -3 = -3A \Longrightarrow A = 1 \\ \frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \end{array} \right] =$$

$$\int \frac{1}{x+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x-2}\, dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C$$

3.11. Galicia

3.11.1. Modelo de 2020

Problema 3.11.1 Da respuesta a los siguientes apartados:

a) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$, di que relación debe existir entre a y b para que f sea continua y que valores deben tener para que f sea derivable.

b) Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$$

Solución:

a) Continuidad en $x = e$

$$\lim_{x \longrightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow e^-} \ln x = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow e^+} (ax + b) = ae + b$$

$$ae + b = 1$$

Derivabilidad en $x = e$ $f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \in (0, e] \\ a & \text{si} \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$ $f'(e^-) = \frac{1}{e}$ y $f'(e^+) = a \Longrightarrow \frac{1}{e} = a \Longrightarrow ae = 1$

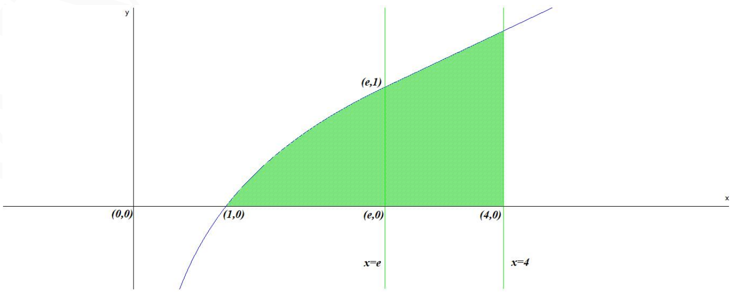
$$\begin{cases} ae + b = 1 \\ ae = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{e} \\ b = 0 \end{cases}$$

b) $f(x) = 0 \Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$:

$$S_1 = \int_1^e \ln x\, dx = x(\ln x - 1)]_1^e = 1$$

$$S_2 = \int_e^4 \frac{x}{e}\, dx = \left.\frac{x^2}{2e}\right]_e^4 = \frac{16 - e^2}{2e}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + \frac{16 - e^2}{2e} = \frac{-e^2 + 2e + 16}{2} \simeq 2,584\ u^2$$



Problema 3.11.2 Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

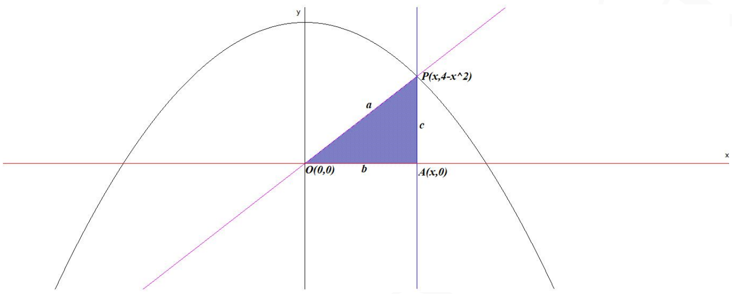
Solución:

a) El cateto $b = x$ el $c = f(x) = 4 - x^2$ y la hipotenusa $a = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 7x^2 + 16}$.

$$S(x) = \frac{bc}{2} = \frac{x(4 - x^2)}{2} = \frac{4x - x^3}{2} \Longrightarrow S'(x) = \frac{4 - 3x^2}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S''(x) = -3x \Longrightarrow S''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Longrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u \text{ es un máximo.}$$

Luego los catetos miden $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,155\ u$, $c = \frac{8}{3} = 2,667\ u$ y $a = \frac{2\sqrt{19}}{3} = 2,906\ u$



b) Ver teoría.

3.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.11.3 Se pide:

a) Calcule $\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-2\sin x \cos x}{2 - 2e^{2x}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{2(1 - e^{2x})} = \left[\frac{0}{0}\right] =$
$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-2\cos 2x}{-4e^{2x}} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

b) Tenemos $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$ y $f'(x) = \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$.
La función es creciente en el intervalo $(1, \infty)$.
La función tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.

Problema 3.11.4 Se pide:

a) Calcule los valores de b y c para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} e^{2x} & \text{si} & x \le 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\displaystyle\int_1^2 x(\ln x - 1)\,dx$

Solución:

a) Para que sea derivable tiene que ser continua en $x = 0$:

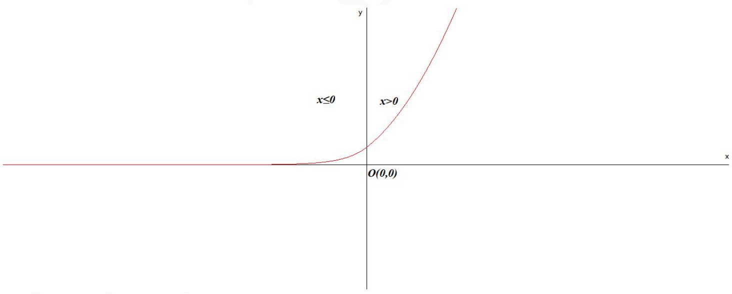
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} e^{2x} = 1; \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \left(x^2 + bx + c\right) = c \Longrightarrow c = 1$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} 2e^{2x} & \text{si} & x \le 0 \\ 2x + b & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Longrightarrow b = 2$$

La función quedaría:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} e^{2x} & \text{si} & x \le 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$



b) $F(x) = \displaystyle\int x(\ln x - 1)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x - 1 \Longrightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2(\ln x - 1)}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2(\ln x - 1)}{2} - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2(2\ln x - 3)}{4} + C$

$$\int_1^2 x(\ln x - 1)\,dx = F(2) - F(1) = 2\ln 2 - 3 + \frac{3}{4} = 2\ln 2 - \frac{9}{4} \simeq -0,86371$$

3.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.11.5 Determine los valores de a y b que hacen que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} \frac{a - \cos x}{x} & \text{si} & x < 0 \\ bx & \text{si} & x \ge 0 \end{array} \right.$$

sea, primero continua, y luego derivable. **Solución:** Para que sea derivable tiene que ser continua en $x=0$:
Tenemos $f(0)=0$ y los límites laterales

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{a-\cos x}{x}=\left[\frac{a-1}{0}\Longrightarrow a=1\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin x}{1}=0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}(bx)=0$$

Luego por continuidad $a=1$
Derivabilidad en $x=0$:

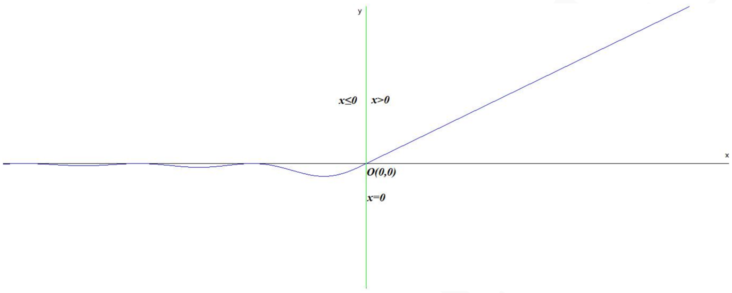
$$f'(x)=\begin{cases}\frac{\cos x+x\sin x-1}{x^2} & \text{si} \quad x<0\\ b & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}\Longrightarrow f'(0^-)=f'(0^+)\Longrightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\cos x+x\sin x-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{-\sin x+\sin x+x\cos x}{2x}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x\cos x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\cos x-x\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

La función quedaría:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x} & \text{si} \quad x<0\\ \frac{x}{2} & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$



Problema 3.11.6 Se pide:

a) Calcule el área encerrada por el eje X y la gráfica de

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1 & \text{si} \quad x<0\\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$

b) Calcule $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

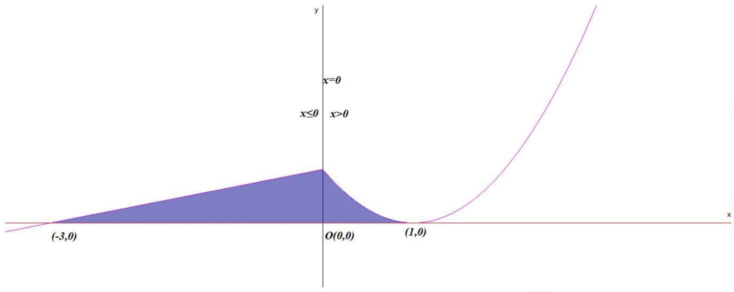
Solución:

a) Si $x<0$ tenemos que f corta el eje de abscisas en $\frac{1}{3}x+1=0\Longrightarrow x=-3$, luego tendremos un recinto S_1 entre -3 y 0.
Si $x\ge 0$ tenemos que f corta el eje de abscisas en $(x-1)^2=0\Longrightarrow x=1$, luego tendremos un recinto S_2 entre 0 y 1.

$$S_1=\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}x+1\right)\,dx=\left.\frac{x^2}{6}+x\right]_{-3}^{0}=\frac{3}{2}$$

$$S_2=\int_0^1 (x-1)^2\,dx=\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\simeq 1,83\ u^2$$



b)

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=x^2-1\\ dt=2xdx\\ dx=\frac{1}{2x}dt\end{array}\right]=\int xt^{1/2}\,\frac{1}{2x}dt=\frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2}+C=$$

$$\frac{t\sqrt{t}}{3}+C=\frac{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{3}+C$$

3.12. Islas Baleares

3.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.12.1 Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $y=f(x)=x^3-3x$

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Haz un esbozo de la gráfica de $y=f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función en el infinito.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función dada y la recta $y=2$.

Solución:

a) $b=f(-1)=2$ y $f'(x)=3x^2-3\Longrightarrow m=f'(-1)=0\Longrightarrow y-2=0(x-1)\Longrightarrow y=2$

b) ♣ Puntos de corte:

- ☛ Con el eje de ordenadas: hacemos $x=0\Longrightarrow (0,0)$
- ☛ Con el eje de abscisas: hacemos $f(x)=0\Longrightarrow x^3-3x=0\Longrightarrow (0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ y $(\sqrt{3},0)$

♣ Monotonía:

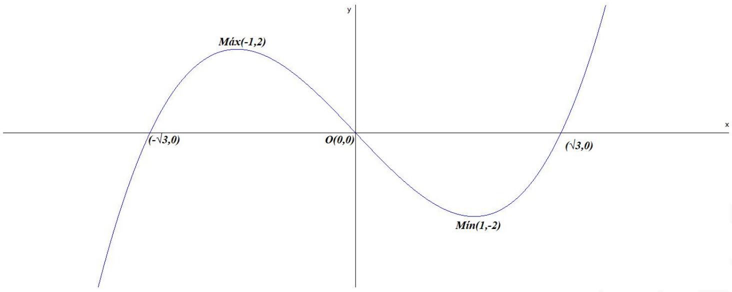
$$f'(x)=3x^2-3=0\Longrightarrow x=\pm 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.
♣ Extremos relativos: La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un mínimo relativo en el $(1, -2)$
♣ Comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$$

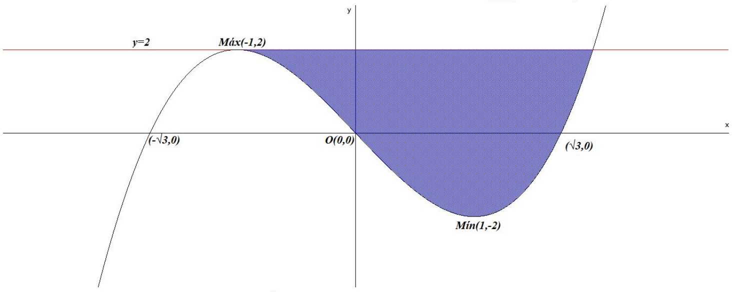
♣ Representación gráfica:



c) Calculamos los puntos de corte de ambas gráficas: $x^3 - 3x = 2 \Longrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$.

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x - 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{27}{4}$$

$$S = |S_1| = \frac{27}{4} \simeq 6,75\ u^2$$



Problema 3.12.2 Considera la función $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - x}$

a) Calcula su dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula una primitiva cualquiera de $f(x)$.

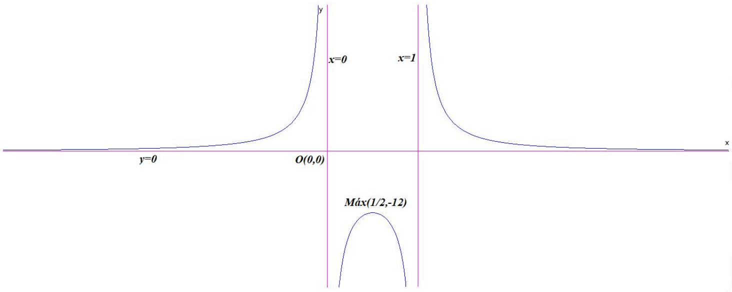
c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y $f'(x) = -\dfrac{3(2x-1)}{x^2(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$.
La función es decreciente en el intervalo $(1/2, 1) \cup (1, \infty)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(1/2, -12)$.



b)

$$\int \frac{3}{x^2-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2-x=0 \Longrightarrow x=0,\ \ x=1 \\ \frac{3}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x^2-x} \\ 3 = A(x-1)+Bx \\ x=1 \Longrightarrow 3 = B \Longrightarrow B=3 \\ x=0 \Longrightarrow 3=-A \Longrightarrow A=-3 \\ \frac{3}{x^2-x} = \frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} \end{array}\right] =$$

$$\int \frac{-3}{x}\,dx + 2\int \frac{3}{x-1}\,dx = -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + C$$

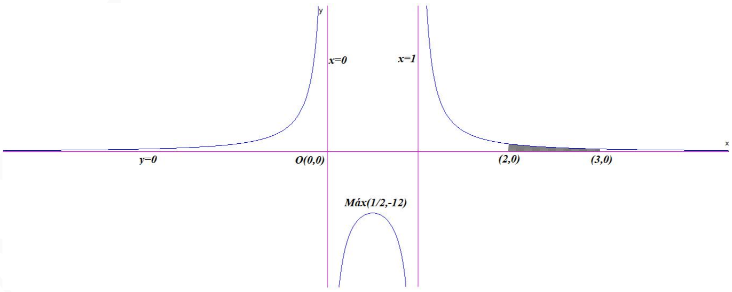
Una primitiva cualquiera puede ser con $C = 2$:

$$F(x) = -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + 2$$

c) La función no corta nunca al eje de abscisas por lo que sólo hay un recinto:

$$S_1 = \int_2^3 \frac{3}{x^2-x}\,dx = -3\ln|x| + 3\ln|x-1|\big]_2^3 = -3\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$S = |S_1| = -3\ln\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0,863\ u^2$$



3.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.12.3 Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$

a) Determina: el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y el $\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} f(x)$.

b) Haz un esbozo de la gráfica.

c) Obtener los valores de A y B para los que $f(x) = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}$

d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

a) ☛ Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$

☛ Puntos de corte:

- Con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/9)$
- Con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow$ no hay

☛ Monotonía:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x-3)^2(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

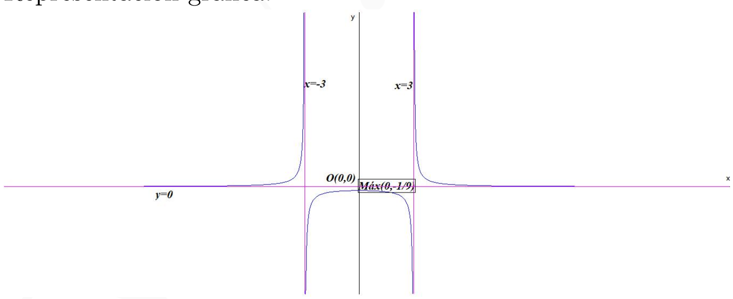
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

☛ Extremos relativos: La función tiene un máximo relativo en el punto $(0, -1/9)$.

☛ Comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{(x-3)(x+3)} = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{(x-3)(x+3)} = 0$$

b) Representación gráfica:



c) $$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)} \Longrightarrow$$

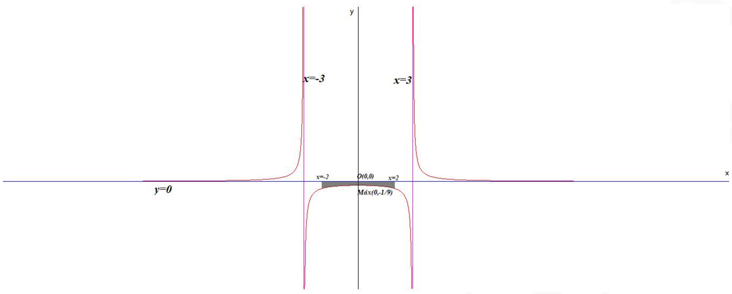
$$1 = A(x+3) + B(x-3) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \Longrightarrow 1 = -6B \Longrightarrow B = -1/6 \\ x = 3 \Longrightarrow 1 = 6A \Longrightarrow A = 1/6 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1/6}{x-3} + \frac{-1/6}{x+3}$$

d) La función no tiene puntos de corte con el eje OX luego sólo hay un recinto.

$$S_1 = \int_{-2}^{2} \frac{1}{(x-3)(x+3)}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x-3|\Big]_{-2}^{2} = -\frac{\ln 5}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{\ln 5}{3} \simeq 0,5365\ u^2$$



Problema 3.12.4 En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \longrightarrow P(t)$, $P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$ donde la variable t, que es un número real mayor o igual que cero, mide el número de años transcurridos desde el 1 de enero del año 2000 y $P(t)$ indica número de individuos, en miles, en el instante de tiempo t. Según el modelo, calcula:

a) La población que había el 1 de enero del año 2000 y la población que habrá a finales del año 2020.

b) El tamaño de la población (en número de individuos) a largo plazo.

c) El año en el que se llega a la población mínima y cuantos individuos habrá.

d) Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \longrightarrow P(t)$.

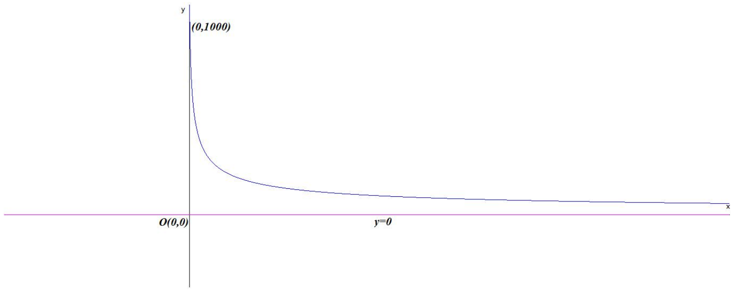
Solución:

a) $P(0) = 1 \Longrightarrow$ había 1000 peces.
$P(21) = \sqrt{22} - \sqrt{21} = 0,10784$ habrá sobre 108 peces.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})}{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})} =$
$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{(\sqrt{t+1})^2 - (\sqrt{t})^2}{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})} = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{t+1}+\sqrt{t})} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$
Cuando el número de años que pasan se hace muy grande la población de peces tiende a desaparecer.

c) $P'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t+1}\sqrt{t}} = 0 \Longrightarrow \sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 0$ esta ecuación no tiene solución, luego no hay extremos relativos. El numerador de la derivada es siempre negativo y el denominador es positivo, por lo que la derivada tiene siempre signo negativo y la función es siempre decreciente.
El número de peces inicial de 1000 individuos iría decreciendo hasta su extinción total.

d) Esbozo de la gráfica de la evolución poblacional:



3.13. Islas Canarias

3.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.13.1 Consideremos la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a) Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$.

b) Calcule el valor de la integral: $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

Solución:

a) ☛ Dominio: $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$

☛ Puntos de corte:

- Con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay
- Con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0)$

☛ Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = e^{1/2}$$

	$(0, e^{1/2})$	$(e^{1/2}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, e^{1/2})$.
La función es decreciente en el intervalo $(e^{1/2}, \infty)$.

☛ Extremos relativos: La función tiene un máximo relativo en el punto $(e^{1/2}, 1/(2e))$.

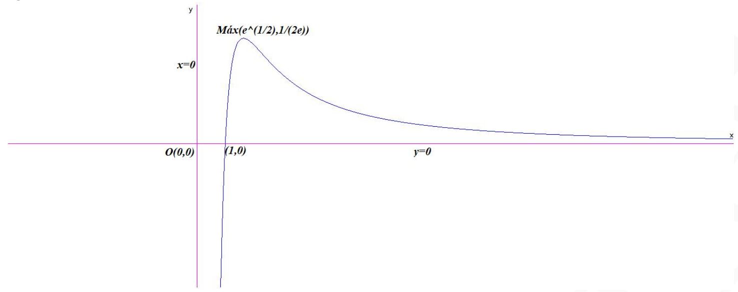
☛ Asíntota horizontal en $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Asíntota vertical en $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{-\infty}{0^+}\right] = -\infty$$

- ☛ Gráfica:



b) $F(x) = \displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x + 1}{x}$

$$\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1) = \frac{e-2}{e} \simeq 0,2642$$

Problema 3.13.2 Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$

a) Calcule los valores a, b y c de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cumplan las dos condiciones siguientes:

- Se cortan en el punto $P(1,1)$
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.

b) Suponiendo $a = b = 1$ en $f(x)$, halle las asíntotas de la funcion: $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3 - 1}$

Solución:

a) Tenemos: $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \Longrightarrow f'(x) = 8x^3 + 2ax$ y $g(x) = -2x^3 + c \Longrightarrow g'(x) = -6x^2$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow 2 + a + b = 1 \\ g(1) = 1 \Longrightarrow -2 + c = 1 \\ f'(1) = g'(1) \Longrightarrow 8 + 2a = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -7 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6 \\ g(x) = -2x^3 + 3 \end{array}\right.$$

b) $h(x) = \dfrac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$ con $\mathrm{Dom}(f) = R - \{1\}$.
Asíntotas:

- ☛ **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} = \infty$$

☛ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^4 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} = 0 \Longrightarrow y = 2x$$

3.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.13.3 Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Calcule: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$

b) Halle las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $$F(x) = \int x \cos x \, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x \, dx \Longrightarrow$$

$$F(x) = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 1$$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1}$ con $\mathrm{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$.
Asíntotas:

☛ **Verticales:**
♣ En $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

♣ En $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

☛ **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

☛ **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x^3 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 - 1} - x \right) =$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} = 5 \Longrightarrow y = x + 5$$

Problema 3.13.4 Halle los valores de a y b para que la recta de ecuación $y = 6x + a$ sea tangente a la curva $f(x) = \dfrac{bx - 1}{bx + 1}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
Escriba las funciones que se obtienen.
Solución:
$f'(x) = \dfrac{2b}{(bx + 1)^2}$ y $m = f'(0) = 2b = 6 \Longrightarrow b = 3 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{3x - 1}{3x + 1}$
El punto de tangencia es $(0, f(0)) = (0, -1) \Longrightarrow -1 = 6 \cdot 0 + a \Longrightarrow a = -1$ luego la recta tangente es $y = 6x - 1$.

3.14. La Rioja

3.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.14.1 Se pide:

a) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1 - \sin x \cos x}{1 + \sin x \cos x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

b) Determinar el valor de la constante real a que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\tan\left(\left(\frac{\pi}{8} + 1\right)\sqrt{x} - 2\right)}{x^2 - 16 + ax} = \frac{1}{32}$$

Solución:

a) $L = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1 - \sin x \cos x}{1 + \sin x \cos x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} = [1^\infty] = e^\lambda$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \left(\frac{1 - \sin x \cos x}{1 + \sin x \cos x} - 1 \right) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \sin x \cos x - 1 - \sin x \cos x}{\sin x(1 + \sin x \cos x)} =$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{\sin x(1 + \sin x \cos x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-2 \cos x}{1 + \sin x \cos x} = -2$$

Luego $L = e^{-2}$.

b)

$$\lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\tan\left(\left(\frac{\pi}{8} + 1\right)\sqrt{x} - 2\right)}{x^2 - 16 + ax} = \lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\tan\left(\left(\frac{\pi}{8} + 1\right) 2 - 2\right)}{4a} = \lim_{x \longrightarrow 4} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4a} =$$

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{32} \Longrightarrow 4a = 32 \Longrightarrow a = 8$$

Problema 3.14.2 Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x) = ax^2 + b$ y $g(x) = x^2 + x + a$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = -1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x = -1$.

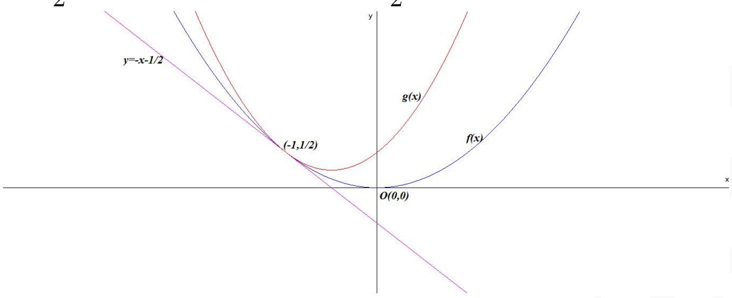
Solución:

$f(x) = ax^2 + b \Longrightarrow f'(x) = 2ax$ y $g(x) = x^2 + x + a \Longrightarrow g'(x) = 2x + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = f'(-1) = g'(-1) \Longrightarrow -2a = -1 \\ f(-1) = g(-1) \Longrightarrow a + b = a \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

El punto de tangencia es $(-1, f(-1)) = \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ y la pendiente es $m = f'(-1) = -1 \Longrightarrow$

$y - \dfrac{1}{2} = -(x+1) \Longrightarrow y = -x - \dfrac{1}{2}$



Problema 3.14.3 Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x = -2$, $x = 2$, el eje OX y la función

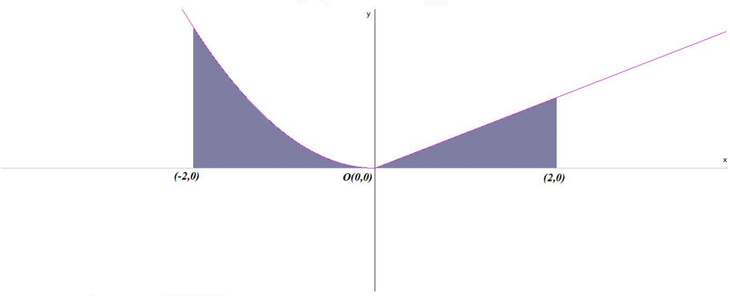
$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 & \text{si} & x < 0 \\ x & \text{si} & x \geq 0 \end{array} \right.$$

Solución:

Hay dos recintos:

$$S_1 = \int_{-2}^{0} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = \frac{8}{3} \qquad S_2 = \int_{0}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \simeq 4,67\ u^2$$



3.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.14.4 Calcular los valores de los parámetros reales a y b para que la función:

$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} a(x^2 - 9) + \frac{bx}{3} - b & \text{si} & x < 3 \\ \ln(b(x-2)) & \text{si} & x \geq 3 \end{array} \right.$ sea derivable.

Solución:

- Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} \left(a(x^2-9) + \dfrac{bx}{3} - b\right) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \ln(b(x-2)) = \ln b \\ f(3) = \ln b \end{array}\right. \Longrightarrow \ln b = 0 \Longrightarrow b = 1$$

- Derivabilidad en $x = 3$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2ax + \frac{b}{3} & \text{si} & x < 3 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si} & x \geq 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(3^-) = 6a + \frac{b}{3} \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow 6a + \frac{b}{3} = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} 18a + b = 3 \\ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{9} \\ b = 1 \end{array}\right.$$

Problema 3.14.5 Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.
Solución:
Hago la representación aunque no lo pidan

- Dominio: $\text{Dom}(f) = R - \{-2\}$
- Puntos de corte:
  - Con el eje de ordenadas: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 3/4)$
  - Con el eje de abscisas: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-3, 0)$
- Asíntotas:
  - **Verticales:**
    En $x = -2$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x+3}{(x+2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x+3}{(x+2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

  - **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+3}{(x+2)^2} = 0$$

  - **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.
- Monotonía:

$$f'(x) = -\frac{x+4}{(x+2)^3} = 0 \Longrightarrow x = -4$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -4) \cup (-2 + \infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-4, -2)$.

- Extremos relativos: La función tiene un mínimo relativo en el punto $(-4, -1/4)$.
- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{2(x+5)}{(x+2)^4} = 0 \Longrightarrow x = -5$$

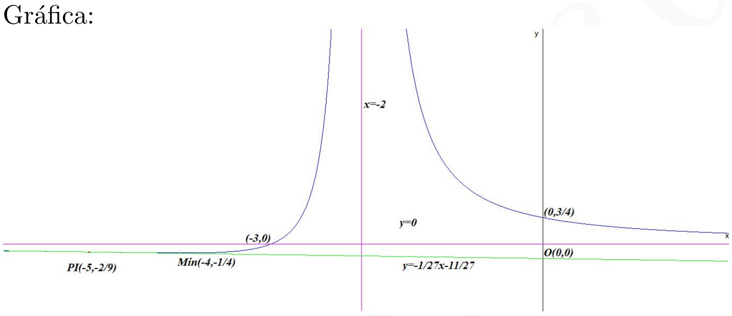
	$(-\infty, -5)$	$(-5, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa ($\frown$) en el intervalo $(-\infty, -5)$.
La función es cóncava ($\smile$) en el intervalo $(-5, -2) \cup (-2, +\infty)$.

- Puntos de inflexión: $(-5, -2/9)$
- Tangente en el punto de inflexión:

$$y + \frac{2}{9} = f'(-5)(x+5) \Longrightarrow y + \frac{2}{9} = -\frac{1}{27}(x+5) \Longrightarrow y = -\frac{1}{27}x - \frac{11}{27}$$

- Gráfica:



Problema 3.14.6 Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g, siendo éstas:

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = (x-2)^2 - 1$$

y las rectas $x = 3$, $x = 5$.
Solución:
Calculamos los puntos de corte de ambas gráficas:

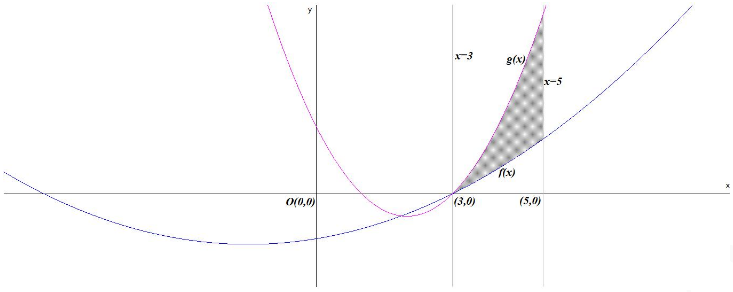
$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2 = (x-2)^2 - 1 \Longrightarrow -8x^2 + 39x - 45 = 0 \Longrightarrow x = 3, \;\; x = \frac{15}{8}$$

El corte en $x = \frac{15}{8}$ está fuera de del recinto que se pide. Sólo se habrá un recinto entre $x = 3$ y $x = 5$

$$S_1 = \int_3^5 \left(\frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2 - (x-2)^2 + 1 \right) dx = \frac{1}{9} \int_3^5 \left(-8x^2 + 39x - 45 \right) dx =$$

$$\frac{1}{9} \left(-\frac{8x^3}{3} + \frac{39x^2}{2} - 45x \right) \Big]_3^5 = -\frac{118}{27}$$

$$S = |S_1| = \frac{118}{27} \simeq 4,3704 \; u^2$$



3.15. Madrid

3.15.1. Modelo de 2020

Problema 3.15.1 Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 1, \ x \neq -1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \qquad\qquad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $x = 1$.

b) Halle las asíntotas de f, si existen.

c) Determine el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{2}$. Escriba la ecuación de dicha recta tangente.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{2}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{1/x}{1} = 1$ y $f(1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Asíntotas:

♣ En la rama $x \leq 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

☛ Verticales:
En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

☛ Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.

♣ En la rama $x > 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$

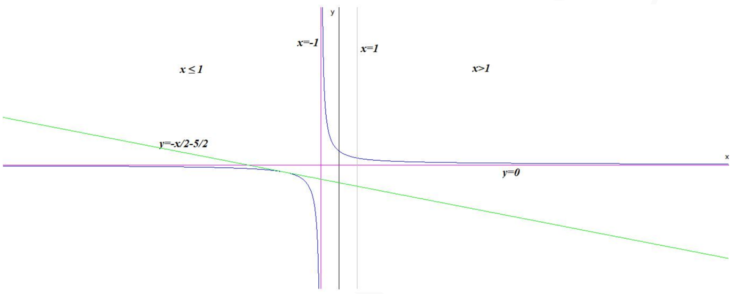
- ☞ Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
- ☞ Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

- ☞ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

c) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x \le 1,\ x \ne -1 \\ -\dfrac{x\ln x - x + 1}{x(x-1)^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$. Como $x_0 < 1 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} \Longrightarrow$
$f'(x_0) = -\dfrac{2}{(x_0+1)^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow$
$x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \Longrightarrow x_0 = -3$ y $x_0 = 1$, esta última no es válida ya que $x_0 < 1$.
En $x_0 = -3 \Longrightarrow f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1 \Longrightarrow (-3,-1)$ es el punto de tangencia. Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x+3) \Longrightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$



Problema 3.15.2 Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Encontrar sus máximos y mínimos relativos, y determinar si son o no absolutos.

c) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

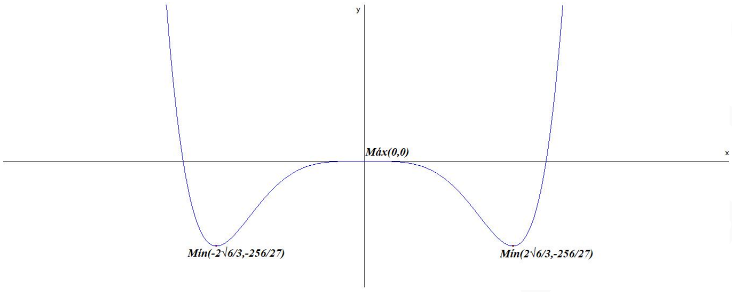
Solución:

a) $f'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 8) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

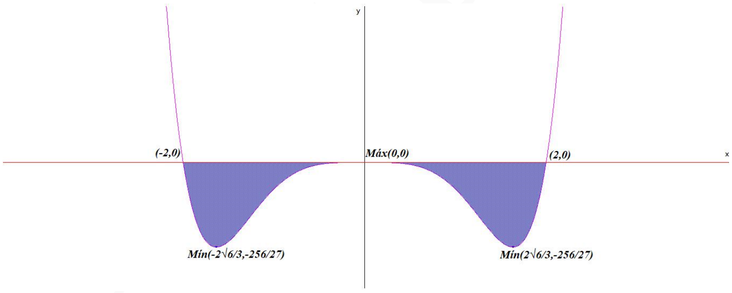
b) Tiene un mínimos relativos en los puntos de abscisa $x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$ y un máximo en el punto de abscisa $x = 0$.
Tenemos que f es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio y tenemos que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} = \infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} = \infty$, luego el máximo es relativo. Por el contrario, los mínimos si son relativos.



c) $f(x) = x^6 - 4x^4 = x^4(x^2 - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm 2$. Tenemos dos recintos $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 2]$ y como la función es par estas dos áreas son iguales.

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^6 - 4x^4)\, dx = \left.\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5}\right]_{-2}^{0} = -\frac{2^8}{35}$$

$$S = 2|S_1| = \frac{2^9}{35} = \frac{512}{35}\ u^2$$



3.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.15.3 Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$.

Solución:

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ función continua en el intervalo $[1, 10]$, con $h(1) = -3 < 0$ y $h(10) = 1239 > 0$. Por el teorema de Bolzano existe un número real $c \in [1, 10]$ en el que $h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$.

b) $m(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x \Longrightarrow m'(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ como $m''(-1) = 6 > 0 \Longrightarrow$ $x = -1$ es un mínimo. Tenemos $m(-1) = -3$ y $f(-1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -3(x + 1) \Longrightarrow y = -3x - 2$$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x}\, dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x|\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{41}{6} - \ln 2\right) \simeq 1,02336.$

Problema 3.15.4 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

a) La función en las ramas es continua estudiamos en el punto $x = 1$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (x-1)^3 = 0$ y $f(1) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-4, 4]$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ es derivable en } [-4, 4]$$

En la rama $[-4, 1]$ tenemos $f'(x) = 2(x-1)$ es $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ en esta rama decrece la función.
En la rama $(1, 4]$ tenemos $f'(x) = 3(x-1)^2$ es $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ en esta rama crece la función.

c)

$$g(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 6(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Continuidad de g en $x = 1$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} 2(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} 3(x-1)^2 = 0$ y $g(1) = 0 \Longrightarrow g$ es continua en $[-4, 4]$.
Derivabilidad de g en $x = 1$: Tenemos $g'(1^-) = 2 \ne g'(1^+) = 0 \Longrightarrow g$ no es derivable en $x = 1$.

3.15.3. Convocatoria Ordinaria-Coincidente junio de 2020

Problema 3.15.5 Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{2} - \sin x + x \cos x$, se pide:

a) Estudiar su crecimiento en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.

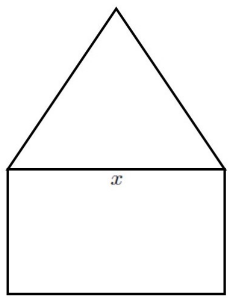
b) Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.

Solución:

a) $f'(x) = -\cos x + \cos x - x\sin x = -x\sin x$. En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en todo este intervalo.
Por otra parte f es continua y cumple que $f(0) = \frac{1}{2} > 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. Como además la función es decreciente en todo el intervalo este punto es único.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \sin x + x\cos x\right) dx = \frac{x}{2} + \cos x + \cos x + x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$\displaystyle\frac{x}{2} + 2\cos x + x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi - 8}{4} \simeq 0,3562$
Nota: $\displaystyle\int x\cos x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Longrightarrow v = \sin x \end{array}\right] =$
$\displaystyle x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x.$

Problema 3.15.6 Disponemos de 10 metros de una barra metálica.
Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida.



Se pide:

a) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

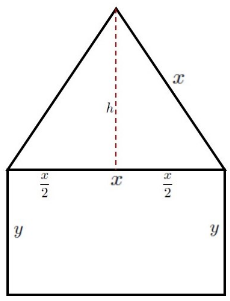
b) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.

Solución:

a) $h(x) = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

b) $10 = 4x + 2y \Longrightarrow y = 5 - 2x$

$S(x) = S_t(x) + S_r(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + x(5 - 2x)$
$S(x) = \left(\frac{\sqrt{3} - 8}{4}\right) x^2 + 5x$
$S'(x) = \left(\frac{\sqrt{3} - 8}{2}\right) x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1,595$ m
$S''(x) = \frac{\sqrt{3} - 8}{2} = -3,13 < 0 \Longrightarrow x = 1,595$ es un máximo relativo.
$x = 1,595$ m e $y = 5 - 2x = 1,809$ m



3.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.15.7 Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x < 1,\ x \neq -1 \\ \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \qquad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

b) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) Estudiar sus asíntotas.

Solución:
.

a) Si $x < 1$ y $x \neq -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} \Longrightarrow f(0) = 1$ y $(f \circ f)(x) = f(f(0)) = f(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) ♣ Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Luego la función es continua en $x = 1$.
♣ Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 1,\ x \neq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si} \qquad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -\frac{1}{4},\ \ f'(1^+) = 0 \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow$$

f no es derivable en $x = 1$.
La función es continua en $x = 1$ y en ese punto la función pasa de decrecer a crecer, luego hay un mínimo local en ese punto.

c) Asíntotas:
♣ En la rama $x < 1$:

- ☛ Verticales: la única posible es en $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: en $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

♣ En la rama $x \geq 1$:

☞ Verticales: No hay.

☞ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x} = +\infty$$

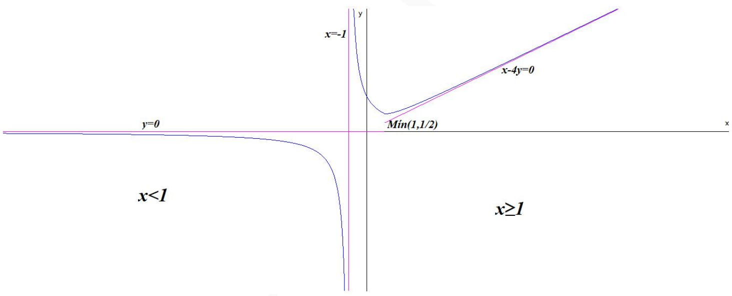
☞ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{x}{4} \right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

$$y = \frac{1}{4}x \Longrightarrow x - 4y = 0$$

.



Problema 3.15.8 La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución:

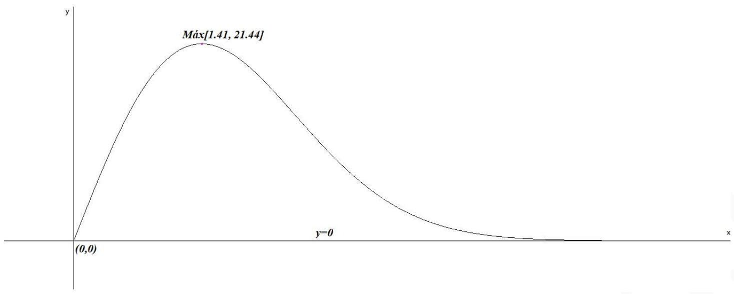
a) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{25}{\frac{t}{2} e^{t^2/4}} = 0$
La batería se agota con el tiempo.

b) $P'(t) = \dfrac{25}{2}(2-t^2)e^{-t^2/4} = 0 \Longrightarrow (2-t^2) = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{2}$. La solución negativa no es relevante.

	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = \sqrt{2}$ es un máximo local.

El máximo se produce a las $\sqrt{2}$ unidades de tiempo con $P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{\dfrac{2}{e}}$ unidades de potencia.



c) $E'(t) = P(t) \Longrightarrow E(t) = \displaystyle\int \left(25te^{-t^2/4}\right)\,dt = -50e^{-t^2/4} + C$

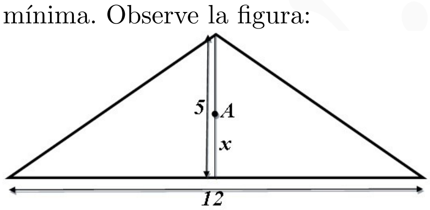
$E(0) = 0 \Longrightarrow -50 + C = 0 \Longrightarrow C = 50 \Longrightarrow E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$

La función $P(t)$ no corta el eje de abscisas en el intervalo $(0,2)$ luego $\displaystyle\int_0^2 \left(25te^{-t^2/4}\right)\,dt = E(2) - E(0) = \dfrac{50(e-1)}{e} \simeq 31,61\ u^2$

3.16. Murcia

3.16.1. Modelo de 2020

Problema 3.16.1 Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



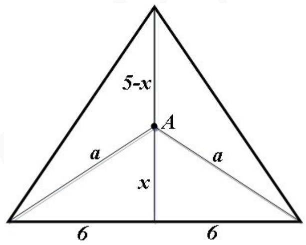
a) Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2+36}$.

b) Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

a) La función suma de distancia de A a los vértices es: $f(x) = 2a+5-x = 5-x+2\sqrt{x^2+36}$ según se deduce del dibujo.



b) $f'(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} = 0 \Longrightarrow x = 2\sqrt{3}$

	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{3})$ y creciente en el intervalo $(2\sqrt{3}, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 5+6\sqrt{3}) = (3,46; 15,39)$.

c) $f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{3} \simeq 15,39$ cm

Problema 3.16.2 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx$

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución:

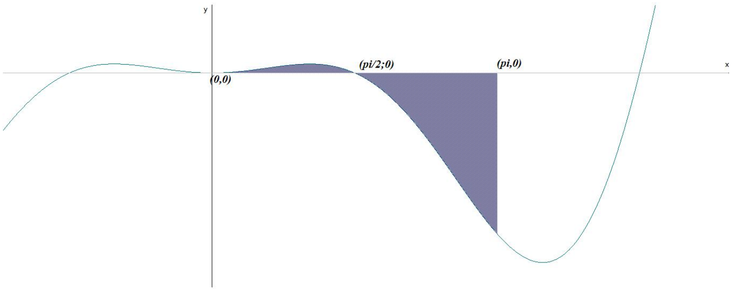
a) $\displaystyle\int x^2 \cos x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = \cos xdx \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\, dx =$ $\left[\begin{array}{l} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin xdx \Longrightarrow v = -\cos x \end{array} \right] = x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \int \cos x\, dx\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$

b) La función $f(x) = x^2 \cos x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Uno de los puntos de corte de la función f con el eje OX se encuentra dentro del intervalo de integración, luego habrá dos áreas a calcular, una S_1 en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y otra S_2 en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Sea $F(x) = \displaystyle\int x^2 \cos x\, dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x$ y tenemos:

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$S_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} x^2 \cos x\, dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} - 2\pi + 2$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{\pi^2}{4} - 2 + \frac{\pi^2}{4} + 2\pi - 2 = \frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{2} \simeq 7,22\ u^2$$



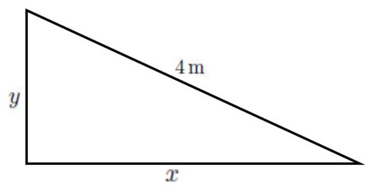
3.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.16.3 De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?
Solución:

- Tenemos $x^2 + y^2 = 4^2 \Longrightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

- La función a optimizar es $S(x, y) = \dfrac{xy}{2} \Longrightarrow S(x) = \dfrac{x\sqrt{16 - x^2}}{2}$

- Derivamos:
  $S'(x) = \dfrac{16 - 2x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$, la solución negativa no es relevante.



	$(0, 2\sqrt{2})$	$(2\sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

  La función es creciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{2})$ y decreciente en el intervalo $(2\sqrt{2}, \infty)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $(2\sqrt{2}, 4)$. El otro cateto vale $y = \sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$.

- Las dimensiones son $x = y = 2\sqrt{2}$ m, y $S = 4$ m^2.

Problema 3.16.4 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx$

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ y la recta vertical $x = 1$.

Solución:

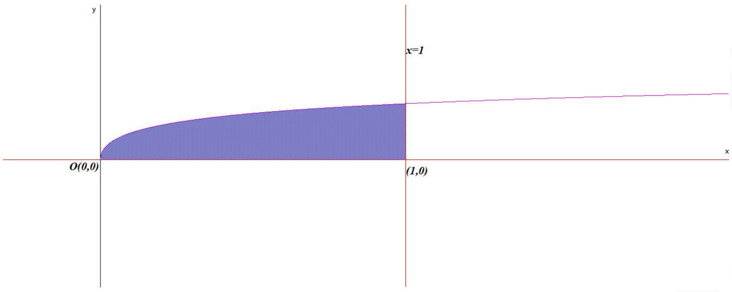
a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2t}dx \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{t}{1 + t} \cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t^2}{1 + t}\, dt =$

$2\int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t + 1|\right) + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$

b) La función es siempre positiva y no corta el eje de abscisas (salvo en $x = 0$), por lo que sólo hay un recinto

$$S_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = x - 2\sqrt{x} + 2\ln|\sqrt{x}+1|\Big]_0^1 = -1 + 2\ln 2$$

$$S = |S_1| = -1 + 2\ln 2 \simeq 0,3863$$



3.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.16.5 Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$.

Solución:

a) $$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+x} - \frac{-1}{3-x}}{2} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

b) $$\lim_{x\longrightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}) = [\infty - \infty] = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} =$$
$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x+2})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})} = 0$$

Problema 3.16.6 Se pide:

a) Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

b) Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Solución:

a) $$F(x) = \int \ln(1+x^2)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \Longrightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array}\right] = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Hacemos:
$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \arctan x$$

$$F(x) = x\ln(1+x^2) - 2(x - \arctan x) + C$$

b) $$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2(x-\arctan x)\Big]_0^1 = \frac{\pi-4}{2} + \ln 2 \simeq 0,2639$$

3.17. Navarra

3.17.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.17.1 Calcula los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})$

Solución:

a) $\displaystyle L=\lim_{x\longrightarrow 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=[1^\infty]=e^\lambda$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x^2-x}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}{2x-1}=\frac{0}{1}=0\Longrightarrow L=e^0=1$$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})=[\infty-\infty]=$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}{(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1})^2-(\sqrt{x^4-7})^2}{(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

Problema 3.17.2 Sea la función $f(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[0,1]$.

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

a) La función seno es siempre continua y la exponencial también lo es, si tiene la base positiva. Por otra parte la función seno está acotada $-1\le\sin t\le 1\Longrightarrow 1+\sin t\ge 0\Longrightarrow 1+\sin\frac{\pi x}{2}\ge 0$. Además esta función no se anula en el intervalo $[0,1]$, luego es estrictamente mayor de cero en $[0,1]$ luego f es continua en el intervalo. $(1+\sin\frac{\pi x}{2}=0\Longrightarrow x=\pm 3\notin[0,1])$

b) Derivamos $f(x)$:

$$\ln(f(x))=x\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)\Longrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)+x\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}$$

$$f'(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\left[\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}\right]$$

Tenemos $f'(1)=2\ln 2>0$, $f'(2)=-\pi<0$ y f' continua en $(1,2)$ condiciones del teorema de Bolzano. Este teorema nos afirma que existe un punto $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

Problema 3.17.3 Sea la función $f(x) = (x+3)^{\sin(\pi x)} \ln(x^2 - x + 2)$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$.

b) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

a) La función $x+3$ es continua y positiva en $[-1, 0]$ por ser lineal. Luego la exponencial también es continua. Concluimos que $(x+3)^{\sin(\pi x)}$ es continua en $[-1, 0]$.
La función $x^2 - x + 2$ es un polinomio y, por tanto, continua en el intervalo en cuestión. Además $x^2 - x + 2 > 0$ luego la función $\ln\left(x^2 - x + 2)\right)$ es continua.
$f(x)$ es el producto de dos funciones continuas, por lo que es continua.

b) Si f es continua en $[-1, 0]$ y derivable en $(-1, 0)$, por el Teorema de Lagrange, existe un punto $\alpha \in (-1, 0)$ que cumple $f'(\alpha) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{\ln 2 - 2\ln 2}{1} = -\ln 2$

Problema 3.17.4 Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \sin(\pi x) \quad \text{y} \quad g(x) = |x^2 - x|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

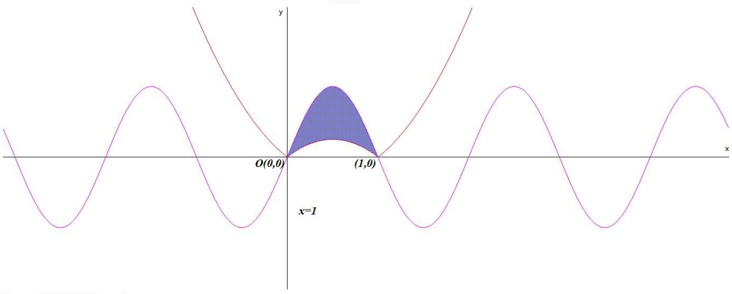
Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \sin(\pi x) = |x^2 - x| \Longrightarrow x = 0, \quad x = 1$$

En el intervalo $[0, 1]$ $g(x) = -x^2 + x$

$$S_1 = \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 (\sin(\pi x) + x^2 - x)\, dx = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{6}$$

$$S = |S_1| = \frac{12 - \pi}{6\pi} \simeq 0,47\ u^2$$



3.17.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.17.5 Calcula las integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{x-7}{x^2 + x - 6}\, dx$

b) $\displaystyle\int e^{2x} \sin(2x+1)\, dx$

Solución:

a) $$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = \left[\begin{array}{c} x^2+x-6=0 \Longrightarrow x=-3,\ \ x=2 \\ \frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{x^2+x-6} \\ x-7 = A(x-2)+B(x+3) \\ x=2 \Longrightarrow -5 = 5B \Longrightarrow B=-1 \\ x=-3 \Longrightarrow -10=-5A \Longrightarrow A=2 \\ \frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{2}{x+3} + \frac{-1}{x-2} \end{array}\right] =$$

$$\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + C$$

b) $$I = \int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\sin(2x+1) \Longrightarrow du = 2\cos(2x+1)dx \\ dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right] =$$

$$\frac{e^{2x}\sin(2x+1)}{2} - \int e^{2x}\cos(2x+1)dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} u=\cos(2x+1) \Longrightarrow du = -2\sin(2x+1)dx \\ dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{array}\right] =$$

$$\frac{e^{2x}\sin(2x+1)}{2} - \frac{e^{2x}\cos(2x+1)}{2} - \int e^{2x}\sin(2x+1)dx$$

$$I = \frac{e^{2x}(\sin(2x+1)-\cos(2x+1))}{2} - I \Longrightarrow 2I = \frac{e^{2x}(\sin(2x+1)-\cos(2x+1))}{2} \Longrightarrow$$

$$I = \int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = \frac{e^{2x}(\sin(2x+1)-\cos(2x+1))}{4} + C$$

Problema 3.17.6 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} + \ln\frac{x^2+2}{3} & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{x^2}{3} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Demuestra que existe un valor $\alpha \in (0,2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso.

Solución:

a) Para que la función sea derivable tiene que ser continua.

- ☛ Las dos ramas son continuas, hay que comprobar la continuidad en $x=1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-}\left(\frac{1}{3} + \ln\frac{x^2+2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}, \ \text{y} \ \ f(1) = \frac{1}{3}$$

Luego la función es continua en $x=1$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$.

- ☛ Las dos ramas son derivables, hay que comprobar la derivabilidad en $x=1$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+2} & \text{si} \quad x<1 \\ \frac{2x}{3} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$ y tenemos $f'(1^-) = \frac{2}{3} = f'(1^+) \Longrightarrow f$ es derivable en $x=1$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$.

b) Sea $g(x) = f'(x) - 1$, esta función es continua en $(0, 2)$ y tenemos $g(0) = f'(0) - 1 = -1 < 0$ y $g(2) = f'(2) - 1 = \frac{4}{3} > 0$ por lo que se puede aplicar el teorema de Bolzano que nos afirma que $\exists\alpha \in (0, 2)/g(\alpha) = 0 \Longrightarrow f'(\alpha) - 1 = 0 \Longrightarrow f'(\alpha) = 1$

Problema 3.17.7 Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

$$f(x) = e^{\pi x} \sin \pi x \Longrightarrow f'(x) = \pi e^{\pi x} \sin \pi x + \pi e^{\pi x} \cos \pi x = \pi e^{\pi x}(\sin \pi x + \cos \pi x) = 0 \Longrightarrow$$

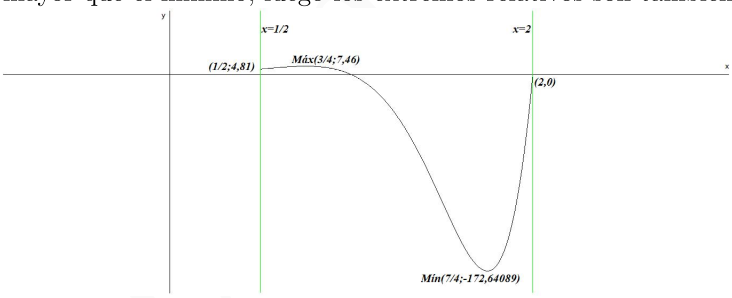
$$\sin \pi x + \cos \pi x \Longrightarrow \tan \pi x + 1 = 0 \Longrightarrow \tan \pi x = -1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ \pi x = \frac{7\pi}{4} + k\pi \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + k \\ x = \frac{7}{4} + k \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{N}$$

Como $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right] \Longrightarrow x = \dfrac{3}{4}$ y $x = \dfrac{7}{4}$

	$(0, 3/4)$	$(3/4, 7/4)$	$(7/4, 2)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $[0, 3/4) \cup (7/4, 2]$ y decreciente en el intervalo $(3/4, 7/4)$. La función presenta un máximo relativo en el punto $(3/4; 7, 46)$ y un mínimo relativo en $(7/4; -172, 64)$ Para que estos extremos sean absolutos tenemos que compararlos con los valores correspondientes a los bordes del intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Tenemos $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\pi/2} \simeq 4, 81$ menor que el máximo y $f(2) = 0$ mayor que el mínimo, luego los extremos relativos son también absolutos en el intervalo.



Problema 3.17.8 Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x - 2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Solución:

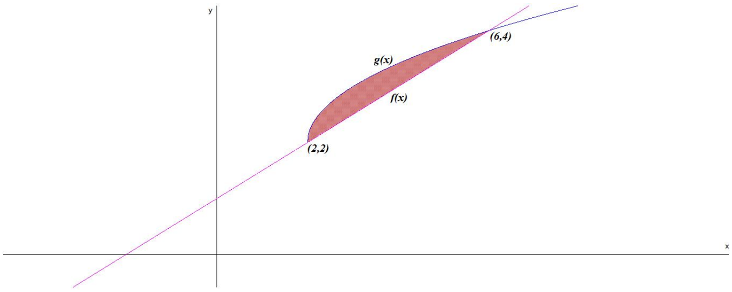
$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{x}{2} + 1 = \sqrt{x - 2} + 2 \Longrightarrow \frac{x}{2} - 1 = \sqrt{x - 2} \Longrightarrow x - 2 = 2\sqrt{x - 2} \Longrightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4x - 8 \Longrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = 6$$

Las dos soluciones obtenidas son válidas y corresponden a los puntos $(2, 2)$ y $(6, 4)$

$$S_1 = \int_2^6 \left(\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{x - 2}\right) dx = \frac{x^2}{4} - x - \frac{2(x - 2)^{3/2}}{3}\Bigg]_2^6 = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{4}{3} \simeq -1,33 \ \ u^2$$



3.18. País Vasco

3.18.1. Modelo de 2020

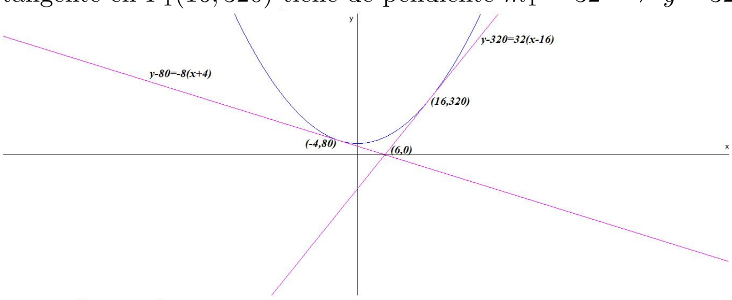
Problema 3.18.1 Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6,0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P.

Solución:
Lo primero que tenemos que encontrar son los puntos de la función en los que su tangente pasa por el punto exterior $P(6,0)$. Sea $(a, f(a)) = (a, a^2+64)$ el punto de tangencia que buscamos, si la recta tangente tiene que pasar por $P(6,0)$ la pendiente de esta recta será: $m = \dfrac{a^2+64}{a-6}$. Por otra parte calculamos la pediente con la derivada de la función $f'(x) = 2x \Longrightarrow m = f'(a) = 2a$. Luego

$$\frac{a^2+64}{a-6} = 2a \Longrightarrow a^2 - 12a - 64 = 0 \Longrightarrow a = -4, \ \ a = 16$$

$$P_1(-4, 80), \quad P_2(16, 320)$$

La tangente en $P_1(-4,80)$ tiene de pendiente $m_1 = -8 \Longrightarrow y - 80 = -8(x+4)$.
La tangente en $P_1(16,320)$ tiene de pendiente $m_1 = 32 \Longrightarrow y - 320 = 32(x-16)$.



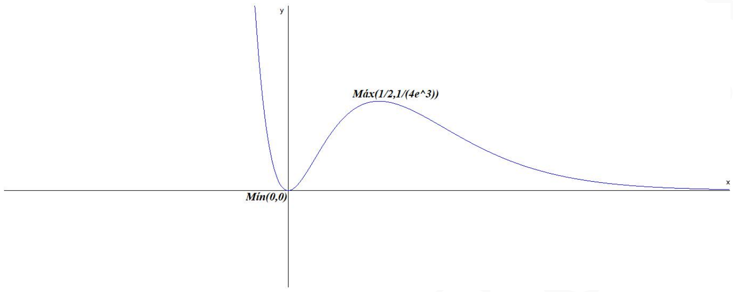
Problema 3.18.2 Calcula $\displaystyle\int xe^{-4x}\,dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:

$$\int xe^{-4x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x}dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right] = -\frac{xe^{-4x}}{4} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx =$$
$$-\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C = -e^{-4x}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16}\right) + C = -e^{-4x}\left(\frac{4x+1}{16}\right) + C$$

Problema 3.18.3 Sea f la función $f(x) = x^2e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivada de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

Solución:
$f'(x) = 2xe^{-4x} - 4x^2e^{-4x} = e^{-4x}(2x - 4x^2) = 2xe^{-4x}(1 - 2x)$
$f''(x) = -4e^{-4x}(2x - 4x^2) + e^{-4x}(2 - 8x) = 2e^{-4x}(8x^2 - 8x + 1)$
$f'(x) = 2xe^{-4x}(1 - 2x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{1}{2}$
$f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow$ en $(0, 0)$ hay un mínimo local.
$f''(1/2) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Longrightarrow$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^3}\right)$ hay un máximo local.

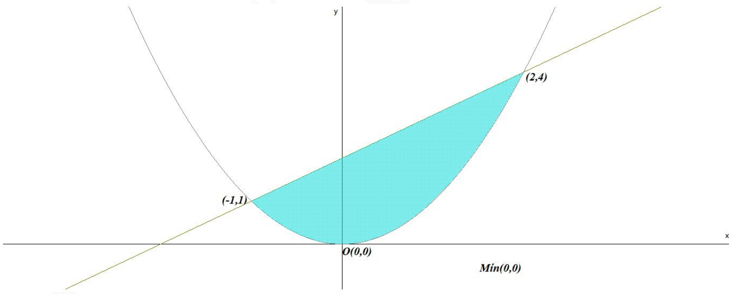


Problema 3.18.4 Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

Solución:

$$x + 2 = x^2 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 2$$

$$S = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\, u^2$$



3.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 3.18.5 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $(0, 2)$ y tenga un extremo en $(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos?
Solución:

☛ $f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

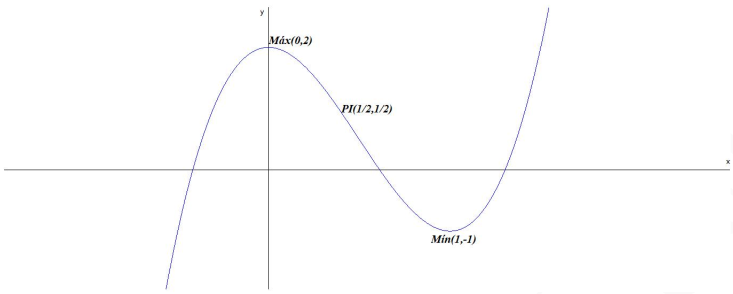
$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c = -1 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = -9 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

$$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$$

☛ $f'(x) = 18x^2 - 18x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(0, 1)$. Con un máximo en el punto $(0, 2)$ y un mínimo en el punto $(1, -1)$.



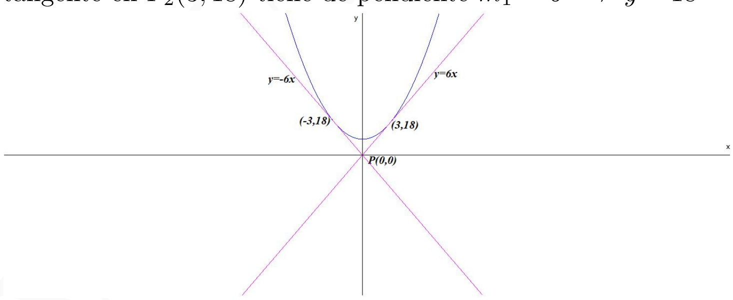
Problema 3.18.6 Sea $f(x) = x^2 + 9$ y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P(0, 0)$, Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

Solución:
Lo primero que tenemos que encontrar son los puntos de la función en los que su tangente pasa por el punto exterior $P(0, 0)$. Sea $(a, f(a)) = (a, a^2 + 9)$ el punto de tangencia que buscamos, si la recta tangente tiene que pasar por $P(0, 0)$ la pendiente de esta recta será: $m = \dfrac{a^2 + 9}{a}$. Por otra parte calculamos la pediente con la derivada de la función $f'(x) = 2x \Longrightarrow m = f'(a) = 2a$. Luego

$$\frac{a^2 + 9}{a} = 2a \Longrightarrow a^2 - 9 = 0 \Longrightarrow a = \pm 3$$

$$P_1(-3, 18), \quad P_2(3, 18)$$

La tangente en $P_1(-3, 18)$ tiene de pendiente $m_1 = -6 \Longrightarrow y - 18 = -6(x + 3) \Longrightarrow y = -6x$.
La tangente en $P_2(3, 18)$ tiene de pendiente $m_1 = 6 \Longrightarrow y - 18 = 6(x - 3) \Longrightarrow y = 6x$.



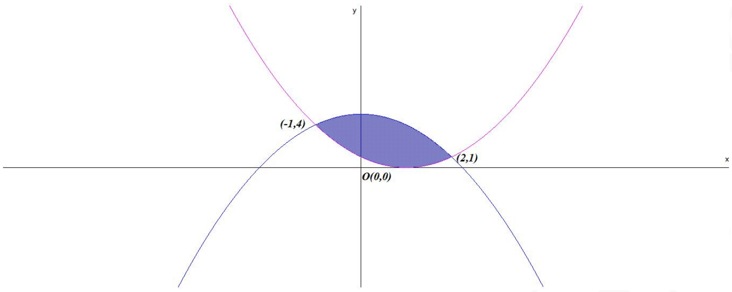
Problema 3.18.7 Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Solución:

$$x^2-2x+1=-x^2+5 \Longrightarrow 2x^2-2x-4=0 \Longrightarrow x=-1,\ \ x=2$$

$$S_1=\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)\,dx=\left.\frac{2x^3}{3}-x^2-4x\right]_{-1}^{2}=-9$$

$$S=|S_1|=9\ u^2$$



Problema 3.18.8 Calcular las integrales siguientes, explicando el proceso utilizado para dichos cálculos.

a) $I=\displaystyle\int x\cos(2x)\,dx$

b) $J=\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$

Solución:

a) $I=\displaystyle\int x\cos(2x)\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx \\ dv=\cos(2x)dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}\sin(2x)\end{array}\right]=\frac{x\sin(2x)}{2}-\frac{1}{2}\int \sin(2x)\,dx=$ $\displaystyle\frac{x\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+C=\frac{2x\sin(2x)+\cos(2x)}{4}+C$

b) $$J=\int\frac{1}{x^2+2x-3}\,dx=\left[\begin{array}{c} x^2+2x-3=0\Longrightarrow x=-3,\ \ x=1 \\ \frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+3)}{x^2+2x-3} \\ 1=A(x-1)+B(x+3) \\ x=1\Longrightarrow 1=4B\Longrightarrow B=1/4 \\ x=-3\Longrightarrow 1=-4A\Longrightarrow A=-1/4 \\ \frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{-1/4}{x+3}+\frac{1/4}{x-1}\end{array}\right]=$$

$$\int\left(\frac{-1/4}{x+3}+\frac{1/4}{x-1}\right)dx=-\frac{1}{4}\ln|x+3|+\frac{1}{4}\ln|x-1|+C$$

3.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 3.18.9 Sea f la función definida como sigue: $f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} ax^2+3x & \text{si} & x\le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si} & x>2\end{array}\right.$. Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.
Solución:

- Las dos ramas son polinómicas y son continuas y derivables. Hay que estudiar la continuidad primero y luego la derivabilidad en $x=2$.

- Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (ax^2 + 3x) = 4a + 6$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} (x^2 - bx - 4) = -2b$$

$$4a + 6 = -2b \Longrightarrow 4a + 2b = -6 \Longrightarrow 2a + b = -3$$

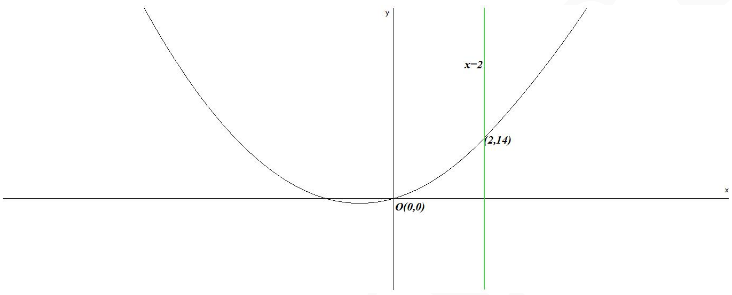
- Derivabilidad en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x - b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{cases} \Longrightarrow$$

$$4a + 3 = 4 - b \Longrightarrow 4a + b = 1$$

- $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases}$

- $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 + 7x - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

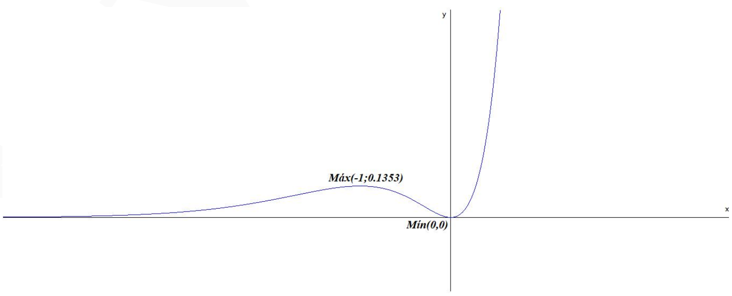


Problema 3.18.10 Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2e^{2x}$. Encontrar sus extremos.
Solución:

$f'(x) = e^{2x}(2x^2 + 2x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 0)$. Con un máximo en el punto $(-1, e^{-2})$ y un mínimo en el punto $(0, 0)$.

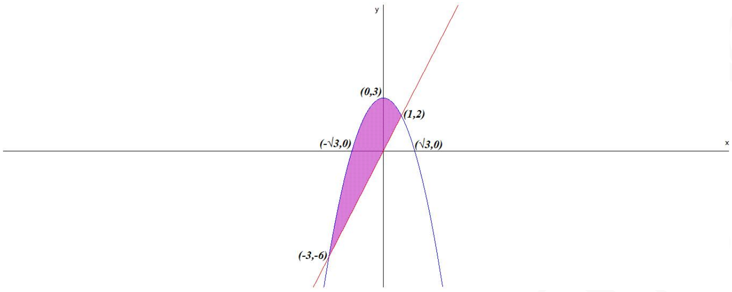


Problema 3.18.11 Representar la región finita del plano limitada por la curva $y = 3 - x^2$ y por la recta $y = 2x$. Calcular su área.

Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 3 - x^2 = 2x \Longrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -3, \;\; x = 1$$

Con una tabla de valores se representa:



$$S_1 = \int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \Big]_{-3}^{1} = -\frac{32}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3} = 10,667 \; u^2$$

Problema 3.18.12 Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral $\int x\cos(3x)\, dx$.

Solución:
Consiste en separar la función a integrar en el producto de dos funciones: $f(x) = u \cdot dv$. Veamos la fórmula:

$$d(uv) = vdu + udv \Longrightarrow udv = d(uv) - vdu \Longrightarrow \int udv = \int d(u\cdot v) - \int vdu \Longrightarrow$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos(3x)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \cos(3x)\, dx \Longrightarrow v = \frac{\sin(3x)}{3} \end{array} \right] = \frac{x\sin(3x)}{3} - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\, dx =$$

$$\frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C = \frac{3x\sin(3x) + \cos(3x)}{9} + C$$

Capítulo 4

Probabilidad

4.1. Resúmenes teóricos

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

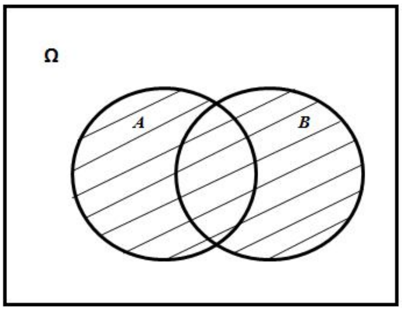
En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

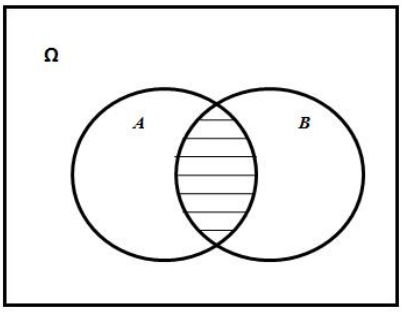
Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

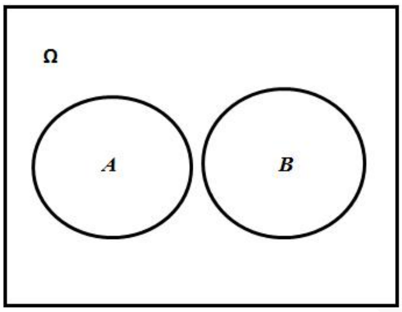
Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$

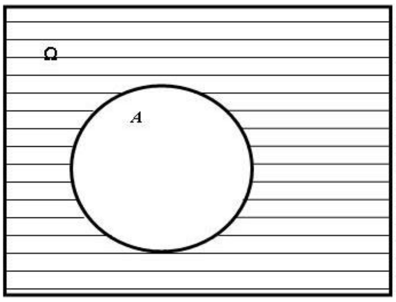


Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

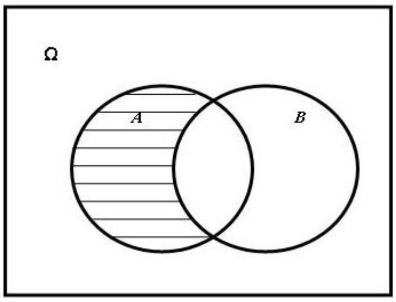
Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



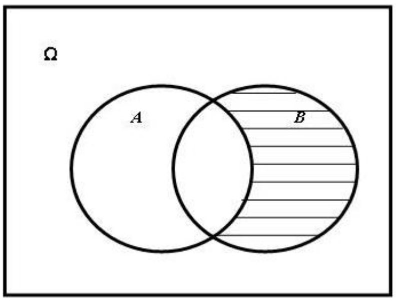
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

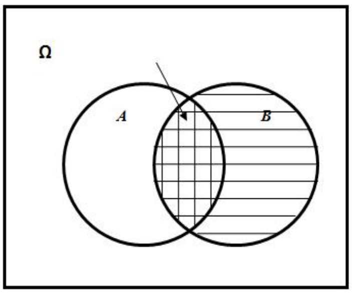


Organización por árboles:

Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

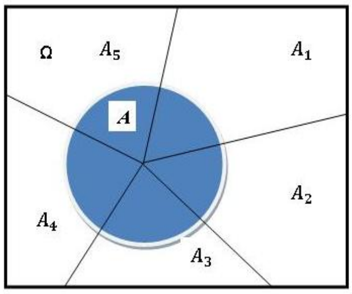
$$P(B|S) = \frac{20}{475},\ \ P(N|M) = \frac{200}{210},\ \ P(B) = \frac{45}{1000},\ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$



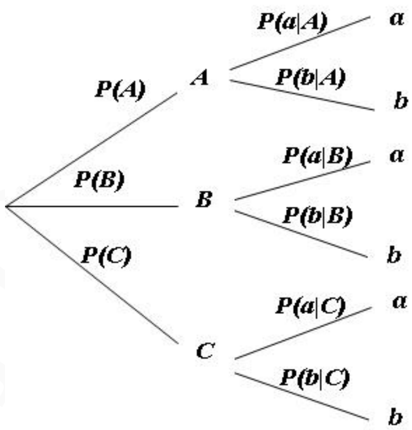
Probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



4.2. Andalucía

No pusieron problemas de probabilidad.

4.3. Aragón

4.3.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

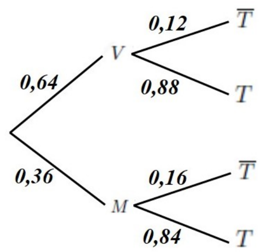
Problema 4.3.1 Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12 %, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16 %. Además, la probabilidad de ser varón es del 64 % y la de ser mujer del 36 %.

a) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.
Solución:
Sea T trabaja, $\overline{T}$ en paro, V varón y M mujer.
$P(\overline{T}|V) = 0,12$, $P(\overline{T}|M) = 0,16$, $P(V) = 0,64$ y $P(M) = 0,36$.



a) $P(M \cap \overline{T}) = P(M)P(\overline{T}|M) = 0,36 \cdot 0,16 = 0,0576$

b) $P(\overline{T}) = P(V)P(\overline{T}|V) + P(M)P(\overline{T}|M) = 0,64 \cdot 0,12 + 0,36 \cdot 0,16 = 0,1344$

c) $P(M|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|M)P(M)}{P(\overline{T}} = \dfrac{0,16 \cdot 0,36}{0,1344} = 0,4286$

4.3.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.3.2 En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80 % disponía de ordenador, el 15 % disponía de móvil y el 10 % disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

Solución:
Sea O : dispone de ordenador, M dispone de móvil
$P(O) = 0,8$, $P(M) = 0,15$ y $P(O \cap M) = 0,1$.

a) $P(O \cup M) = P(O) + P(M) - P(O \cap M) = 0,8 + 0,15 - 0,1 = 0,85$

b) $P(\overline{O} \cap \overline{M}) = P(\overline{O \cup M}) = 1 - P(O \cup M) = 1 - 0,85 = 0,15$

4.4. Asturias

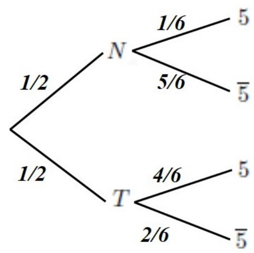
4.4.1. Modelo de 2020

Problema 4.4.1 Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5.

b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Solución:
Sea N : dado normal y T : el dado truncado.
Tenemos $P(N) = P(T) = \frac{1}{2}$, $P(5|N) = \frac{1}{6}$ y $P(5|T) = \frac{4}{6}$.



a) $P(5) = P(5|N)P(N) + P(5|T)P(T) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} = 0,4167$

b) $P(T|5) = \dfrac{P(5|T)P(T)}{P(5)} = \dfrac{4/6 \cdot 1/2}{5/12} = \dfrac{2}{5} = 0,8$

4.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.4.2 En un espacio muestral se tienen dos sucesos A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cap B) = 0,3$, $P(A|B) = P(B|A)$ y $P(\overline{A}) = 0,2$ ($\overline{A}$ es el suceso contrario) Calcula:

a) $P(B|A)$.

b) $P(B)$.

c) ¿Son los sucesos independientes?

Solución:

a) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,3}{1 - 0,2} = 0,375$

b) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \dfrac{0,3}{0,375} = 0,8$

c) $P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,8 = 0,64 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

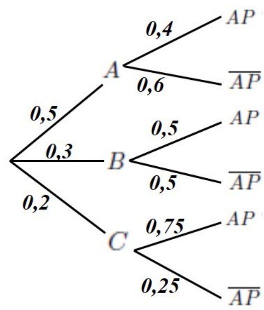
4.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.4.3 En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas.

b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B.

Solución: Sea A el alumno elegido es del grupo A, B el alumno elegido es del grupo B, C el alumno elegido es del grupo C, AP el alumno elegido aprueba y $\overline{AP}$ el alumno elegido no aprueba. Tenemos: $P(A) = \dfrac{50}{100} = 0,5$, $P(B) = \dfrac{30}{100} = 0,3$, $P(C) = \dfrac{20}{100} = 0,2$, $P(AP|A) = 0,4$, $P(AP|B) = 0,5$ y $P(AP|C) = 0,75$.



a) $P(AP) = P(AP|A)P(A) + P(AP|B)P(B) + P(AP|C)P(C) =$
$0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,2 = 0,5$

b) $P(B|AP) = \dfrac{P(AP|B)P(B)}{P(AP)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,3}{0,5} = 0,3$

4.5. Cantabria

4.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.5.1 En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale "Cara" sumamos 300 € adicionales.

a) Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.

b) Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.

c) Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €.

Solución:
Sea C sale cara en la moneda, X sale cruz en la moneda, 1 sale un uno en el dado, 2 sale un 2 en el dado y así sucesivamente hasta el 6.

a) Los sucesos posibles para ganar 400 € son $(X, 4)$ y $(C, 1)$:
$P(\text{gana400 €}) = P(X, 4) + P(C, 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6}$

b) $P(\text{gana400 €}|C) = P(1) = \dfrac{1}{6}$

c) $P(C|\text{gana400 €}) = \dfrac{P(\text{gana400 €}|C)P(C)}{P(\text{gana400 €})} = \dfrac{1/6 \cdot 1/2}{1/6} = \dfrac{1}{2}$

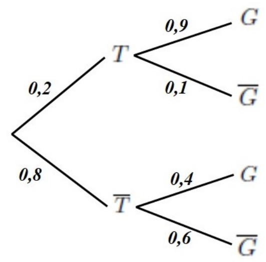
4.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.5.2 Un tenista juega el 20 % de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90 % de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40 % de los partidos.

a) Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

b) Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Solución:
Sea T jugar en tierra batida y G ganar el partido.



a) $P(G) = P(G|T)P(T)+P(G|\overline{T})P(\overline{T}) = 0,9\cdot 0,2+0,4\cdot 0,8 = 0,5$

b)
$$P(T|G) = \frac{P(G|T)P(T)}{P(G)} = \frac{0,9\cdot 0,2}{0,5} = 0,36$$

4.6. Castilla La Mancha

4.6.1. Modelo de 2020

Problema 4.6.1 Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a) No salga defectuoso.

b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

Solución:
A: fábrica A, B: fábrica B, C: fábrica C y D: defectuoso.
$P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,5$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,1$ y $P(D|C) = 0,02$
$P(D\cap A) = P(D|A)P(A) = 0,04\cdot 0,3 = 0,012$; $P(D\cap B) = P(D|B)P(B) = 0,1\cdot 0,2$ y $P(D\cap C) = P(D|C)P(C) = 0,02\cdot 0,5$

	A	B	C	Total
D	$0,012$	$0,02$	$0,01$	
$\overline{D}$				
	$0,3$	$0,2$	$0,5$	

$\Longrightarrow$

	A	B	C	Total
D	$0,012$	$0,02$	$0,01$	$0,042$
$\overline{D}$	$0,288$	$0,18$	$0,49$	$0,958$
	$0,3$	$0,2$	$0,5$	

a) $P(\overline{D}) = 0,958$

b)

	$\overline{C}$	C	Total
D	$0,032$	$0,01$	$0,042$
$\overline{D}$	$0,468$	$0,49$	$0,958$
	$0,5$	$0,5$	

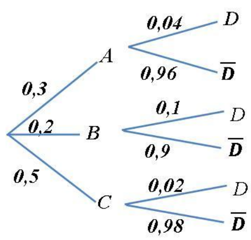
$$\Longrightarrow P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C}\cap D}{P(D)} = \frac{0,032}{0,042} = 0,7619$$

De otra manera:

a)

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) =$$

$$0,96 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 + 0,98 \cdot 0,5 = 0,958$$



b)

$$P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = 0,7619$$

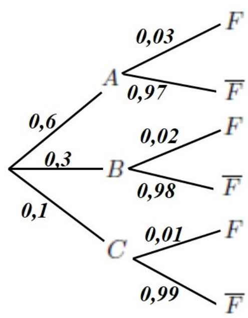
4.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.6.2 En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos son falsas alarmas es 3 % en el caso del código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso.

a) ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

b) Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

Solución:
Sea A al suceso "se activa el código amarillo", B al suceso "se activa el código naranja", C al suceso "se activa el código rojo" y F falsa alarma.



a) $P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) + P(F|C)P(C) =$
$0,03 \cdot 0,6 + 0,02 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,1 = 0,025$

b) $P(B \cup C|\overline{F}) = \dfrac{P((B \cup C) \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P((B \cap \overline{F}) \cup (C \cap \overline{F}))}{1 - P(F)} =$
$\dfrac{0,3 \cdot 0,98 + 0,1 \cdot 0,99}{1 - 0,025} = 0,98 \cdot 0,04 + 0,02 \cdot 0,96 = 0,4031$

4.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

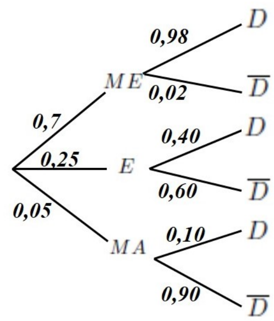
Problema 4.6.3 El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

a) ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

b) Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

Solución:
Sea ME los usuarios con menos de 34 años, E los usuarios entre 34 y 54 años, MA los usuarios

con mayores de 34 años y D acceden diariamente.



a) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|ME)P(ME) + P(\overline{D}|E)P(E) + P(\overline{D}|MA)P(MA) =$
$0,02 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,25 + 0,90 \cdot 0,05 = 0,209$

b) $P(E|D) = \dfrac{P(D|E)P(E)}{P(D)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,25}{1 - 0,209} = 0,1264$

4.7. Castilla León

4.7.1. Modelo de 2020

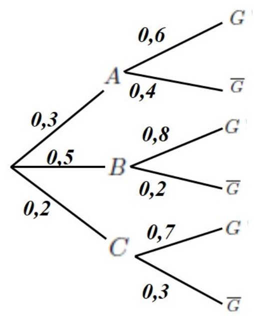
Problema 4.7.1 Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados, el bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20 % de los casos legales y gana el 70 %de los casos presentados.

a) Se consideran los sucesos $A =$ "caso adjudicado al bufete A", $B =$ "caso adjudicado al bufete B", $C =$ "caso adjudicado al bufete C", $G =$ "caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G|A)$, $P(G|B)$, $P(G|C)$.

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso.

c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A.

Solución:



a) $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = 0,2$, $P(G|A) = 0,6$, $P(G|B) = 0,8$, $P(G|C) = 0,7$.

b) $P(G) = P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C) =$
$0,6 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,72$

c) $P(A|G) = \dfrac{P(G|A)P(A)}{P(G)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,3}{0,72} = 0,25$

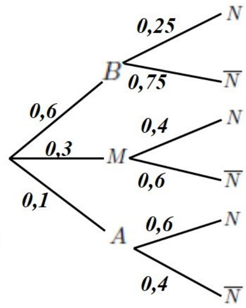
4.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.7.2 La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

a) Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento.

b) Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio.

Solución:
Sea B al suceso "tonelaje bajo", M al suceso "tonelaje medio", A al suceso "tonelaje alto" y N al suceso "necesita mantenimiento":



a) $P(M) = P(N|B)P(B) + P(N|M)P(M) + P(N|A)P(A) =$
$0,25 \cdot 0,6 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,1 = 0,33$

b)
$$P(M|N) = \frac{P(N|M)P(M)}{P(N)} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,33} = 0,3636$$

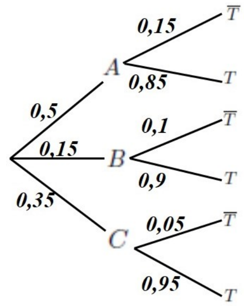
4.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.7.3 Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50 % de Andalucía, un 15 % de Baleares y un 35 % provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15 % de Andalucía, 10 % de Baleares y 5 % de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina.

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León?

Solución:
Sea A="estudiante de Andalucía", B="estudiante de Baleares", C="estudiante de Castilla León" e T="consiguen el título de medicina".



a) $P(\overline{T}) = P(\overline{T}|A)P(A) + P(\overline{T}|B)P(B) + P(\overline{T}|C)P(C) =$
$0,5 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,35 \cdot 0,05 = 0,1075$

b) $P(A|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|A)P(A)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,5 \cdot 0,15}{0,1075} = 0,6977$
$P(C|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|C)P(C)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,35 \cdot 0,05}{0,1075} = 0,1628$
Es más probable que venga de Andalucía.

4.8. Cataluña

No pusieron problemas de probabilidad.

4.9. Comunidad Valenciana

No pusieron problemas de probabilidad.

4.10. Extremadura

4.10.1. Modelo de 2020

Problema 4.10.1 En una clase de bachillerato, el 40 % han aprobado filosofía y el 50 % matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar filosofía habiendo aprobado también matemáticas es de 0,8.

a) ¿Qué tanto por ciento de alumnos suspende ambas asignaturas?

b) Calcule el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Solución:
Sea M al suceso "aprueba matemáticas" y F al suceso "aprueba filosofía":

$$P(M) = 0,5,\ \ P(F) = 0,4 \ \text{ y } \ P(F|M) = 0,8 = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(F \cap M) = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4$$

	F	$\overline{F}$	Total
M	$0,4$		$0,5$
$\overline{M}$			
	$0,4$	$0,2$	

$\Longrightarrow$

	F	$\overline{F}$	Total
M	$0,4$	$0,10$	$0,5$
$\overline{M}$	0	$0,5$	$0,5$
	$0,4$	$0,6$	1

a) $P(\overline{F} \cap \overline{M}) = 0,5 \Longrightarrow 50\,\%$

b) $P(M|F) = \dfrac{P(M \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,4}{0,4} = 1 \Longrightarrow 100\,\%$

4.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

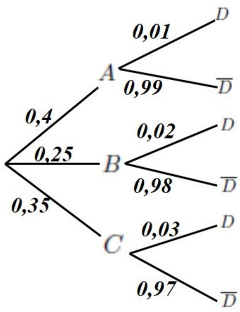
Problema 4.10.2 Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40 % de los lotes, a B el 25 % y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de B el 2 % y de C el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso.

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B.

Solución:
LLamamos A al suceso "lotes A", B al suceso "lotes B", C al suceso "lotes C" y D al suceso "lotes

defectuosos ".



a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) =$
$0,01 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 0,25 + 0,03 \cdot 0,35 = 0,0195$

b) $P(B|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|B)P(B)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,98 \cdot 0,25}{1 - 0,0195} = 0,2499$

4.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.10.3 Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1100 personas vieron el debate del lunes, 1000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates.

b) Si vio el debate el lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes.

Solución:
Sea A al suceso "vieron el debate del lunes" y B al suceso "vieron el debate del martes".
Tenemos $P(A) = \dfrac{1100}{1500} = \dfrac{11}{15}$, $P(B) = \dfrac{1000}{1500} = \dfrac{2}{3}$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{300}{1500} = \dfrac{1}{5}$

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \dfrac{1}{5} \Longrightarrow P(A \cup B) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$
$\dfrac{11}{15} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{3/5}{11/15} = \dfrac{9}{11}$

4.11. Galicia

4.11.1. Modelo de 2020

Problema 4.11.1 El 40 % de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35 % tienen rosas y el 21 % tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

Solución:
LLamamos C al suceso "tiene camelias", R al suceso "tiene rosas"
$P(C) = 0,4$, $P(R) = 0,35$ y $P(C \cap R) = 0,21$

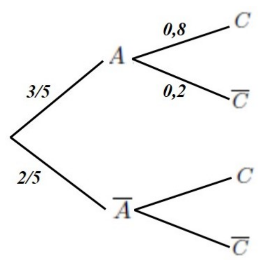
- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0,4 + 0,35 - 0,21 = 0,54$
- $P(\overline{C} \cap \overline{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0,54 = 0,46$

- $P(C|R) = \dfrac{P(C\cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,21}{0,35} = 0,6$
- $P(R|C) = \dfrac{P(R\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,21}{0,4} = 0,525$
- $P(R\cap\overline{C}) + P(C\cap\overline{R}) = P(C\cup R) - P(C\cap R) = 0,54 - 0,21 = 0,33$

4.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.11.2 Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80 % de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Solución:
Sea A al suceso "se le administra el medicamento", $\overline{A}$ al suceso "se le administra placebo", C al suceso "se cura" y $\overline{C}$ al suceso "no se cura"



$P(A) = \dfrac{150}{250} = \dfrac{3}{5}$, $P(B) = \dfrac{2}{5}$ y $P(C|A) = 0,8$.
$P(\overline{A}\cup\overline{C}) = P(\overline{A\cap C}) = 1 - P(A\cap C) = 1 - P(A)P(C|A) = 1 - \dfrac{3}{5}\cdot 0,8 = 0,52$

4.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.11.3 El 57 % de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83 % aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80 %. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Solución:
Sea I al suceso "estudiante de Reino Unido", H al suceso "aprobado con honores"

$$P(I) = 0,57,\ \ P(H) = 0,8\ \text{ y }\ P(H|I) = 0,83 = \frac{P(H\cap I)}{P(I)} \Longrightarrow P(H\cap I) = 0,83\cdot 0,57 = 0,4731$$

	I	$\overline{I}$	Total
H	0,4731		0,8
$\overline{H}$			
	0,57		1

$\Longrightarrow$

	I	$\overline{I}$	Total
H	0,4731	0,3269	0,8
$\overline{H}$	0,0969	0,1031	0,2
	0,57	0,43	1

$$P(\overline{I}|H) = \frac{P(H\cap\overline{I})}{P(H)} = \frac{0,3269}{0,8} = 0,4086$$

4.12. Islas Baleares

4.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

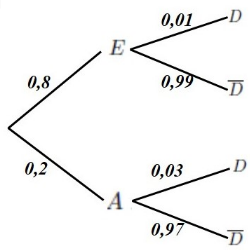
Problema 4.12.1 Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea E y la fábrica asiática A. El 1 % de las impresoras de la fábrica E y el 3 % de las impresoras de la fábrica A se producen con un defecto. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80 %, mientras que el resto proviene de la fábrica A.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora de este país tenga el defecto?

b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán el defecto?

c) Si se elige al azar una impresora de este país y resulta ser una impresora defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E?

Solución:



a) $P(D) = P(D|E)P(E)+P(D|A)P(A) = 0,01\cdot 0,8+0,03\cdot 0,2 = 0,014$

b) $2000000 \cdot P(D) = 2000000 \cdot 0,014 = 28000$ impresoras tendrán defectos.

c) $P(E|D) = \dfrac{P(D|E)P(E)}{P(D)} = \dfrac{0,01 \cdot 0,8}{0,014} = 0,5714$

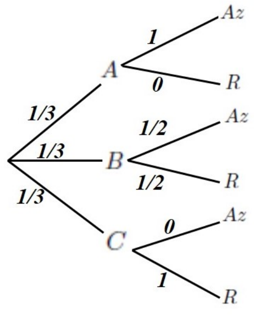
4.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.12.2 Tenemos tres urnas, la primera contiene 2 bolas azules; la segunda, 1 bola azul y 1 de roja; la tercera, 2 bolas rojas. Hacemos el experimento aleatorio: "Elegimos una urna al azar y extraemos una bola". Se supone que todas las urnas tienen la misma probabilidad de ser elegidas.

a) Calcula la probabilidad del suceso $R =$ "bola extraída roja"

b) Si la bola extraída resulta que es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la tercera?

Solución:
Sea A la primera urna, B la segunda urna, C la tercera urna, Az bola azul y R bola roja.



$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$, $P(Az|A) = 1$, $P(R|A) = 0$,
$P(Az|B) = \dfrac{1}{2}$, $P(R|B) = \dfrac{1}{2}$, $P(Az|C) = 0$, $P(R|C) = 1$.

a) $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C) = 0 \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} + 1 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$

b) $P(C|R) = \dfrac{P(C \cap R)}{P(R)} = \dfrac{1 \cdot 1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$.

4.13. Islas Canarias

4.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

No pusieron problemas de probabilidad.

4.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.13.1 Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20 % de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9.

a) Represente el diagrama de árbol del problema.

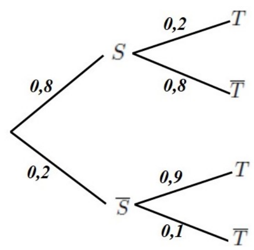
b) Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20 %.

c) Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5.

d) Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

Solución:
Sea S el suceso suena el despertador y T llego tarde a clase.

a) diagrama de árbol:



b) $P(S \cap T) = P(T|S)P(S) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16 \Longrightarrow 16\,\% < 20\,\%$.

c) $P(\overline{T}) = P(\overline{T}|S)P(S) + P(\overline{T}|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,8 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,66 > 0,5$.

d)
$$P(S|T) = \frac{P(T|S)P(S)}{P(T)} = \frac{0,2 \cdot 0,8}{1 - 0,66} = 0,4706.$$

4.14. La Rioja

4.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.14.1 En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

Solución:
Sea N el suceso "practica natación" y B el suceso "practica baloncesto"
Tenemos: $P(N) = 0,5$, $P(B) = 0,2$ y $P(N \cap B) = 0,05$.

a) $P(N \cup B) = P(N) + P(B) - P(N \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,05 = 0,65$
$P(\overline{N} \cap \overline{B}) = P(\overline{N \cup B}) = 1 - P(N \cup B) = 1 - 0,65 = 0,35$

b) $P(N|B) = \dfrac{P(N \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,05}{0,2} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

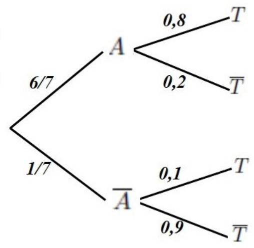
4.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.14.2 En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 10 % de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueban todas las asignaturas.

b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Solución:
Sea A el suceso "asiste a clase" y T el suceso "aprueban todas"
Tenemos: $P(A)=\dfrac{30}{35}=\dfrac{6}{7}=0,86$, $P(T|A)=0,8$ y $P(T|\overline{A})=0,1$



a) $P(T)=P(T|A)P(A)+P(T|\overline{A})P(\overline{A})=$

$0,8\cdot\dfrac{6}{7}+0,1\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{7}{10}=0,7\Longrightarrow 70\,\%$

b) $P(A|\overline{T})=\dfrac{P(\overline{T}|A)P(A)}{P(\overline{T})}=\dfrac{0,2\cdot\dfrac{6}{7}}{1-0,7}=\dfrac{4}{7}=0,5714$

4.15. Madrid

4.15.1. Modelo de 2020

Problema 4.15.1 Una prueba diagnóstica para una enfermedad da resultado negativo el 5 % de las veces que se aplica a un individuo que la padece y da resultado positivo el 10 % de las veces que se aplica a un individuo que no la padece. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad afecta a 50 de cada diez mil personas. Si una persona elegida al azar se somete a la prueba diagnóstica, calcule la probabilidad de:

a) Que la prueba dé resultado positivo.

b) Que la persona padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido positivo.

c) Que la persona no padezca la enfermedad, si el resultado de la prueba ha sido negativo.

d) Que el resultado de la prueba diagnóstica sea erróneo.

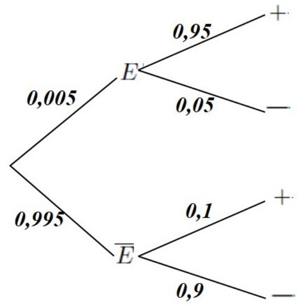
Solución:
E: enfermo, $\overline{E}$: no enfermo, $+$: positivo y $-$: negativo.
$P(-|E)=0,05$, $P(+|\overline{E})=0,10$ y $P(E)=\dfrac{50}{10000}=0,005$

a) $P(+) = P(+|E)P(E) + P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,95 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,10425$

b) $P(E|+) = \dfrac{P(+|E)P(E)}{P(+)} = \dfrac{0,95 \cdot 0,005}{0,10425} = 0,0456$

c) $P(\overline{E}|-) = \dfrac{P(-|\overline{E})P(\overline{E})}{P(-)} = \dfrac{0,90 \cdot 0,995}{1 - 0,10425} = 0,9997$

d) $P(\text{erronea}) = P(E \cap -) + P(\overline{E} \cap +) = P(-|E)P(E) + P(+|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,05 \cdot 0,005 + 0,10 \cdot 0,995 = 0,09975$



4.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.15.2 Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

a) La probabilidad P_1 de que no se lance la cuarta flecha será:
P_1 = probabilidad de acertar en el primer lanzamiento + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y acertar el segundo + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y fallar el segundo lanzamiento y acertar el tercer lanzamiento $= 0,3 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,79$

b) P_2 = probabilidad de no acierta en la primera y no acierta en la segunda y no acierta en la tercera y no acierta en la cuarta $= 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$

c) $B(10; 0,85)$:
$$P(X = 6) = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04$$

Problema 4.15.3 Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) ¿Son A y B independientes?

c) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) Calcular la probabilidad $P(\overline{B}|A)$

Solución:

a) $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(\phi) = 0 \Longrightarrow A \cup B$ y C son incompatibles.

b) $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,25 - 0,125) = 0,375$

d) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75$

4.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente

Problema 4.15.4 De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.

b) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.

c) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.

d) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

Solución:
A : múltiplo de 3 (3,6,9,12,15,18), B : múltiplo de 6 (6,12,18), C : múltiplo de 2 (2,4,6,8,10,12,14,16,18,20) y D : impar (1,3,5,7,9,11,13,15,17,19)

a) $P(AA) = \dfrac{6}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{38}$

b) $P(BA) = \dfrac{3}{20} \cdot \dfrac{5}{19} = \dfrac{3}{76}$

c) $P(\overline{CC}) = P(DD) = \dfrac{10}{20} \cdot \dfrac{9}{19} = \dfrac{9}{38}$

d) $P(D2|D1) = \dfrac{9}{19}$

4.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

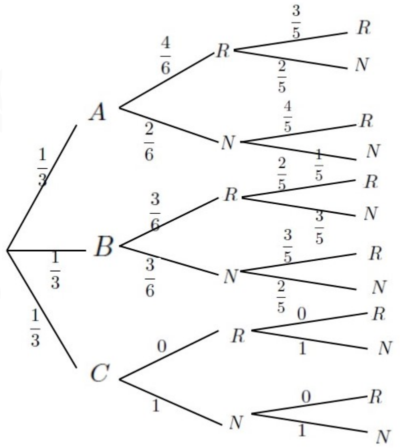
Problema 4.15.5 Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

c) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Solución:
Tenemos $A : \left\{ \begin{array}{l} 4R \\ 2N \end{array} \right.$, $B : \left\{ \begin{array}{l} 3R \\ 3N \end{array} \right.$ y $C : \left\{ \begin{array}{l} 0R \\ 6N \end{array} \right.$.



a) $P(R \text{ primera}) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18} = 0,389$

b) $P(RN) = P(RN|A) \cdot P(A) + P(RN|B) \cdot P(B) + P(RN|C) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 1 = \frac{17}{90} = 0,189.$

c) $P(N2|R1) = \frac{P(N2|R1)}{P(R1)} = \frac{17/90}{7/18} = \frac{17}{35} = 0,486$

4.16. Murcia

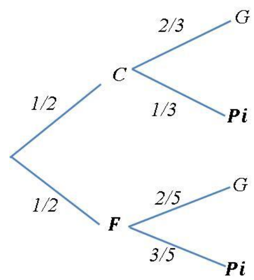
4.16.1. Modelo de 2019

Problema 4.16.1 La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$.

a) Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución: LLamamos G al suceso "gana", Pi al suceso "pierde", C al suceso "en casa" y F al suceso "fuera de casa":



a) $P(G) = P(G|C)P(C) + P(G|F)P(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{15} = 0,533$

b) $P(C|G) = \frac{P(G|C)P(C)}{P(G)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8} = 0,625$

4.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.16.2 En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

Solución:
Sea L al suceso "leer diariamente la prensa" y T al suceso "ver diariamente las noticias en la televisión".
Tenemos $P(L) = 0,4$, $P(T) = 0,75$ y $P(L \cap T) = 0,25$.

a) $P(L) \cdot P(T) = 0,4 \cdot 0,75 = 0,3 \neq P(L \cap T) \Longrightarrow L$ y T no son independientes.

b) $P(L \cap \overline{T}) = P(L) - P(L \cap T) = 0,4 - 0,25 = 0,15$

c) $P(T|L) = \dfrac{P(L \cap T)}{P(L)} = \dfrac{0,25}{0,4} = \dfrac{5}{8} = 0,625$

4.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.16.3 Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

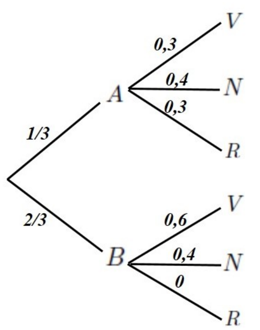
c) Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución:
Tenemos: $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{2}{3}$, $P(V|A) = 0,3$, $P(N|A) = 0,4$, $P(R|A) = 0,3$, $P(V|B) = 0,6$, $P(N|B) = 0,4$ y $P(R|B) = 0$.

a) $P(V) = P(V|A)P(A) + P(V|B)P(B) = 0,3 \cdot \dfrac{1}{3} + 0,6 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b) $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = 0,3 \cdot \dfrac{1}{3} + 0 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{10} = 0,1$

c) $P(B|V) = \dfrac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \dfrac{0,6 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{5} = 0,8$



4.17. Navarra

No pusieron problemas de probabilidad.

4.18. País Vasco

4.18.1. Modelo de 2020

Problema 4.18.1 Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

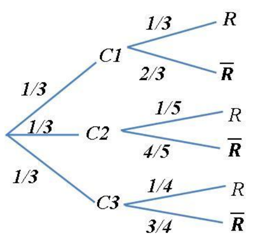
b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de pertenezca a la primera caja?

Solución:
LLamamos V al suceso "botón rojo", $C1$ al suceso "caja primera", $C2$ al suceso "caja segunda" y $C3$ al suceso "caja tercera":

a)

$$P(R) = P(R|C1)P(C1) + P(R|C2)P(C2) + P(R|C3)P(C3) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{47}{180}=0,261$$



b)

$$P(C1|R) = \frac{P(R|C1)P(C1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{0,261} = 0,426$$

4.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 4.18.2 En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 €. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 €?

b) Si gana más de 1000 €, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

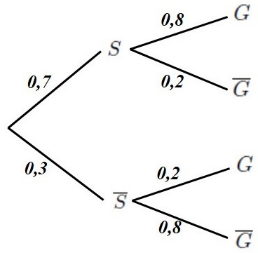
c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 € y esté satisfecha con su contrato?

Solución:
Sea S al suceso "satisfecho con el contrato" y G al suceso "gana más de 1000 €".
Tenemos: $P(S) = 0,7$, $P(G|S) = 0,8$ y $P(G|\overline{S}) = 0,2$.

a) $P(G) = P(G|S)P(S)+P(G|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,8\cdot0,7+0,2\cdot0,3 = 0,62$

b) $P(S|G) = \dfrac{P(G|S)P(S)}{P(G)} = \dfrac{0,8\cdot 0,7}{0,62} = 0,9032$

c) $P(\overline{G}\cap S) = P(S) - P(S\cap G) = P(S) - P(G|S)P(S) =$
$0,7 - 0,8\cdot 0,7 = 0,7\cdot 0,2 = 0,14.$



4.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 4.18.3 En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?

b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Solución:
Sea C al suceso "cabello castaño" y A al suceso "ojos azules":
Tenemos $P(C) = 0,4$, $P(A) = 0,35$ y $P(C \cap A) = 0,15$).

	C	$\overline{C}$	Total
A	$0,15$		$0,35$
$\overline{A}$			
	$0,40$		1

$\Longrightarrow$

	C	$\overline{C}$	Total
A	$0,15$	$0,20$	$0,35$
$\overline{A}$	$0,25$	$0,40$	$0,65$
	$0,40$	$0,60$	1

a) $P(A|C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0,375.$

b) $P(\overline{C}|A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(A)} = \dfrac{0,20}{0,35} = 0,571.$

c) $P(\overline{C} \cap \overline{A}) = 0,40$ ver tabla.

d) $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 0,4 + 0,35 - 0,15 = 0,60.$

Capítulo 5

Estadística

5.1. Resúmenes teóricos

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

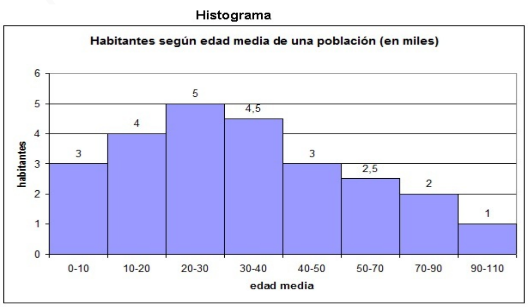
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si B$(7, 0, 4) \Longrightarrow$ $n = 7$, $p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

$$P(X = 2) = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right) 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

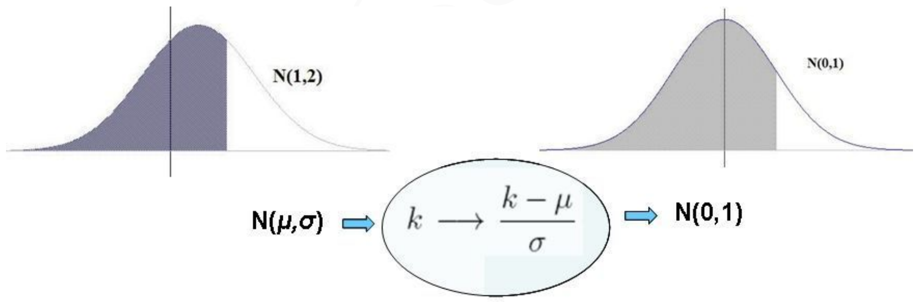
$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal N(μ, σ):

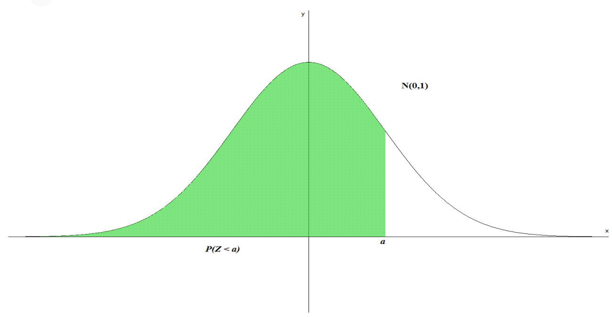
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Tipificación Paso de una normal N(μ, σ) a otra N$(0, 1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal N(μ, σ) entoces Z seguirá una normal N$(0, 1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$



Cuando una distribución binmial $B(n, p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0, 5 \le X \le a + 0, 5)$

$P(X \le a) = P(X \le a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \le a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \ge a + 0,5)$
$P(X \ge a) = P(X \ge a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow\ \alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow\ P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\overline{X} - E, \overline{X} + E) = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
Intervalo de Confianza: $(\hat{p} - E, \hat{p} + E) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

5.2. Andalucía

Sin problemas de estadística

5.3. Aragón

5.3.1. Modelo de 2020

Problema 5.3.1 Una máquina automática que rellena botellas de un refresco está presuntamente regulada para que rellene cada botella con 250 ml. Sin embargo, se sabe que la cantidad real de líquido que hay en cada botella se representa por una variable aleatoria Normal de media 250 ml y varianza 400.

a) Se considera que una botella está correctamente rellenada si contiene entre 240 y 260 ml. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella esté correctamente rellenada?

b) Por otra parte, las botellas con un contenido inferior a 210 ml deben ser desechadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se deseche una botella?

Solución:
Tenemos $N(250, \sqrt{400}) = N(250, 20)$

a) $P\left(240 \le X \le 260\right) = P\left(\dfrac{240-250}{20} \le Z \le \dfrac{260-250}{20}\right) = P(-0,5 \le Z \le 0,5) = P(Z \le 0,5) - P(Z \le -0,5) = P(Z \le 0,5) - (1 - P(Z \le 0,5)) = 2P(Z \le 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383$

b) $P(X \le 210) = P\left(Z \le \dfrac{210-250}{20}\right) = P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

5.3.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.3.2 De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales)

b) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

Solución:
Sea S el suceso "abandona los estudios" luego $p = P(S) = 0,2$, $q = 1 - p = 0,8$ y $n = 5$. Se trata de una distribución binomial $B(5; 0,2)$

a) $P(X \le 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array}\right) 0,2^1 0,8^4 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) 0,2^0 0,8^5 = 0,73728$

b) $P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) 0,2^0 0,8^5 = 0,32768$

$P(X = 5) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array}\right) 0,2^5 0,8^0 = 0,00032$

Es más probable que ninguno abandone los estudios a que los abandonen todos.

5.3.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.3.3 Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

Solución:
Sea $N(30,5)$

a) $P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \dfrac{40-30}{5}\right) = P(Z \leq 2) = 0,9772$

b) $P(20 \leq X \leq 40) = P\left(\dfrac{20-30}{5} \leq Z \leq \dfrac{40-30}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

c) $P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \dfrac{40-30}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

5.4. Asturias

5.4.1. Modelo de 2020

Problema 5.4.1 Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el baloncesto y al 30 % les gustan ambos deportes.

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) Se eligen 100 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el fútbol.

c) Si en el apartado anterior la muestra hubiese sido de 10 alumnos, y no de 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que exactamente a 5 les gustase el fútbol?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $x \geq 0$: $F(1,5) = 0,9332$; $F(1,375) = 0,9154$; $F(1,25) = 0,8944$; $F(1,125) = 0,8697$; $F(1) = 0,8413$) **Solución:**
Sean F al suceso "fútbol" y B al suceso "baloncesto" Tenemos $P(F) = 0,8$, $P(B) = 0,4$ y $P(\cap B) = 0,3$

a) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(\cap B) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9$

b) Tenemos $p = P(F) = 0,8 \Longrightarrow B(100; 0,8)$, $n > 10$, $np = 80 > 5$ y $nq = 20 > 5$ la podemos aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(80,4)$
$P(X \leq 75) = P\left(Z\dfrac{75,5-80}{4}\right) = P(Z \leq -1,125) = 1 - P(Z \leq 1,125) = 1 - 0,8697 = 0,1303$

c) Si $n = 10 \leq 10$, $np = 8 \geq 5$ y $nq = 2 < 5$, luego $B(10; 0,8)$ no se puede aproximar por una normal.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0,8^5 0,2^5 = 0,02642$$

5.4.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.4.2 Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti?

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(x) = P(Z \leq x)$, $F(3,25) = 0,9994$, $F(3,2917) = 0,9995$, $F(3,3333) = 0,9996$, $F(3,375) = 0,9996$, $F(3,4167) = 0,9997$)

Solución:
Sean D defensa, M medio, De delantero y G marca gol.
Tenemos: $P(D) = 0,5$, $P(M) = 0,3$, $P(De) = 0,2$, $P(G|D) = 0,5$, $P(\overline{G}|D) = 0,5$, $P(G|M) = \dfrac{2}{3} = 0,667$, $P(\overline{G}|M) = \dfrac{1}{3} = 0,333$, $P(G|De) = \frac{3}{4} = 0,75$ y $P(\overline{G}|De) = \dfrac{1}{4} = 0,25$

a) $P(G) = P(G|D)P(D) + P(G|M)P(M) + P(G|De)P(De) = 0,5 \cdot 0,5 + \dfrac{2}{3} \cdot 0,3 + \dfrac{3}{4} \cdot 0,2 = \dfrac{3}{5} = 0,6$

b) $p = 0,6$, $q = 1 - p = 0,4$ y $n = 600 \Longrightarrow B(600; 0,6)$. Tenemos: $n > 10$, $np = 600 \cdot 0,6 = 360 > 5$ y $nq = 600 \cdot 0,2 = 120 > 5 \Longrightarrow N(np; \sqrt{npq}) = N(360, 12)$
$P(X \leq 400) = P\left(Z \leq \dfrac{400,5 - 360}{12}\right) = P(Z \leq 3,375) = 0,9996$

5.4.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.4.3 En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos.

b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(x) = P(Z \leq x)$, $F(2) = 0,9772$, $F(1) = 0,8413$, $F(1,5) = 0,9332$; $F(0,5) = 0,6915$, $F(0,2533) = 0,6$, $F(0,5244) = 0,7$, $F(0,8416) = 0,8$)

Solución:

$$N(50, 10)$$

a) $P(30 \le X \le 60) = P\left(\frac{30-50}{10} \le Z \le \frac{60-50}{10}\right) = P(-2 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -2) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 2)) = P(Z \le 1) + P(Z \le 2) - 1 = 0,8413 + 0,9772 - 1 = 0,8185 \Longrightarrow 81,85\,\%$

b) $P(Z \le a) = 0,6 \Longrightarrow a = 0,2533 \Longrightarrow a = \frac{X-50}{10} = 0,2533 \Longrightarrow X = 52,533$

5.5. Cantabria

5.5.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.5.1 Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

a) Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

b) Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1 %.

Solución:

$$N(20; 5)$$

a) $P(X \le 10) = P\left(Z \le \frac{10-20}{5}\right) = P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228 \Longrightarrow 38,3\,\%$

b) $P(X \le a) = 0,01 \Longrightarrow P(X \le -a) = 0,99 \Longrightarrow -a = 2,325 \Longrightarrow -a = -\frac{X-20}{5} = 2,325 \Longrightarrow X = 8,375$

5.5.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.5.2 En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm. Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

a) Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

b) Calcula la probabilidad de que sea holandés.

c) Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

d) Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Solución:

$$N(184; 7)$$

a) $P(\text{altura} \ge 190 \text{ cm}) = \frac{12}{250} = 0,048$

b) $P(\text{holandés}) = \dfrac{7}{250} = 0,028$

c) $P(X \geq 190|\text{holandés}) = P\left(Z \geq \dfrac{190-184}{7}\right) = P(Z \geq 0,86)1 - P(Z \leq 0,86) =$
$1 - 0,8051 = 0,1949$

d) $P(\text{holandés}|\text{altura} \geq 190 \text{ cm}) = \dfrac{P(X \geq 190|\text{holandés})P(\text{holandés})}{P(\text{altura} \geq 190 \text{ cm})} =$
$\dfrac{0,1949 \cdot 0,028}{0,048} = 0{,}1137$

5.6. Castilla La Mancha

5.6.1. Modelo de 2020

Problema 5.6.1 En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

a) Tres chicas.

b) Al menos tres chicos.

Solución:
LLamamos A : chica.

$$p = P(A) = \frac{16}{20} = 0,8 \Longrightarrow B(20;0,8)$$

a) $P(X = 3) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right) 0,8^3 0,2^2 = 0,2048$

b) Si hay 3 chicos quiere decir que hay 2 chicas, que hay 4 chicos quiere decir que hay 1 chica y que salgan 5 chicos quiere decir que han salido 0 chicas. Está claro que 5 chicos no puede haber.
$P = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array}\right) 0,8^0 0,2^5 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array}\right) 0,8^1 0,2^3 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) 0,8^2 0,2^3 =$
$0,0579$

Problema 5.6.2 El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

a) Entre 6,5 y 13 horas.

b) En menos de siete horas.

Solución:

$$N(10;2)$$

a) $P(6,5 \leq X \leq 13) = P\left(\dfrac{6,5-10}{2} \leq Z \leq \dfrac{13-10}{2}\right) = P(-1,75 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1,75) = P(Z \leq 1,5) - (1 - P(Z \leq 1,75)) = 0,9332 - (1 - 0,9599) = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,8931$

b) $P(X \leq 7) = \left(Z \leq \frac{7-10}{2}\right) = P(Z \leq -1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

5.6.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2019

Problema 5.6.3 En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Si en una centralita se reciben 9 avisos,

a) ¿qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b) ¿qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

Solución:
Sean A al suceso "se activa el código amarillo", B al suceso "se activa el código naranja" y R al suceso "se activa el código rojo"

a) $p = P(N) = 0,3 \Longrightarrow B(9; 0,3)$
$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{9}{0} 0,3^0 0,7^9 + \binom{9}{1} 0,3^1 0,7^8 + \binom{9}{2} 0,3^2 0,7^7 = 0,46283$

b) $p = P(A \cup N) = 0,9 \Longrightarrow B(9; 0,9)$
$P(X = 9) = \binom{9}{9} 0,9^9 0,1^0 = 0,38742$

5.6.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.6.4 El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

a) ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

b) ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

Solución:

$$N(53; 10)$$

a) $P(X \ge 30) = P\left(Z \ge \frac{30-53}{10}\right) = P(Z \ge -2,3) = 1 - (P(Z \le -2,3)) =$
$1 - (1 - P(Z \le 2,3)) = P(Z \le 2,3) = 0,9893$

b) $P(40 \le 67) = P\left(\frac{40-53}{10} \le Z \le \frac{67-53}{10}\right) = P(-1,3 \le Z \le 1,4) =$
$P(Z \le 1,4) - P(Z \le -1,3) = P(Z \le 1,4) - (1 - P(Z \le 1,3)) =$
$P(Z \le 1,4) + P(Z \le 1,3) - 1 = 0,9192 + 0,9032 - 1 = 0,8224 \Longrightarrow 82,24\,\%$

5.7. Castilla León

5.7.1. Modelo de 2020

Problema 5.7.1 La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas

adultas obesas de ese país.
Solución:

$$N(26;6)$$

$$P(X \geq 35) = P\left(Z \geq \frac{35-26}{6}\right) = P(Z \geq 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668 \Longrightarrow$$
$6,68\,\%$

5.7.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.7.2 El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

a) Tenga un peso entre 70 y 80 kg.

b) Tenga un peso superior a 85 kg.

Solución:

$$N(75;5)$$

a) $P(70 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{70-75}{5} \leq Z \leq \frac{80-75}{5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$
$P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) = 2P(Z \leq 1) - 1 =$
$2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$

b) $P(X \geq 85) = \left(Z \geq \frac{85-75}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

5.7.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.7.3 El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año?

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg?

Solución:

$$N(15;5)$$

a) $P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-15}{5}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

b) $P(X \geq 25) = P\left(Z \geq \frac{25-15}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 - 1 = 0,228$

5.8. Cataluña

No pusieron problemas de estadística.

5.9. Comunidad Valenciana

No pusieron problemas de estadística.

5.10. Extremadura

5.10.1. Modelo de 2020

Problema 5.10.1 Un pediatra de un centro de salud extremeño está haciendo un estudio del peso de los niños que atiende. El peso de estos niños se distribuye de acuerdo a una distribución normal de media 26 kg y desviación típica 4,3. Se elige un niño al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el peso del niño esté entre 25 y 28 kg.

b) ¿Qué peso ha de tener el niño como mínimo para que esté por encima del umbral del 20 %?

Solución:

$$N(26; 4,3)$$

a) $P(25 \le X \le 28) = P\left(\dfrac{25-26}{4,3} \le Z \le \dfrac{28-26}{4,3}\right) = P(-0,23 \le Z \le 0,47) =$
$P(Z \le 0,47) - (1 - P(Z \le 0,23)) = 0,6808 + 0,5910 - 1 = 0,2718$

b) $P(X \le a) = P\left(Z \le \dfrac{a-26}{4,3}\right) = 0,2 \Longrightarrow P\left(Z \le -\dfrac{a-26}{4,3}\right) = 1-0,2 = 0,8 \Longrightarrow -\dfrac{a-26}{4,3} =$
$0,845 \Longrightarrow a = 22,3665$ kg

5.10.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.10.2 Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples.

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2.

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

$$B(8; 0,6)$$

a) $P(X=5) = \binom{8}{5} 0,6^5 0,4^3 = 0,27869184$

b) $P(X \ge 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] =$
$= 1 - \left[\binom{8}{0} 0,6^0 0,4^8 + \binom{8}{1} 0,6^1 0,4^7\right] = 1 - 0,00851968 = 0,99148032$

c) La media: $np = 8 \cdot 0,6 = 4,8$ triples y la desviación típica: $\sqrt{npq} = \sqrt{8 \cdot 0,6 \cdot 0,4} =$
$1,385640646$ triples

5.10.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.10.3 El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01.

b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm.

Solución:

$$N(5; 0,01)$$

a) $P(X \geq 5,01) = P\left(Z \geq \dfrac{5,01-5}{0,01}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

b) $P(4,98 \leq X \leq 5) = P\left(\dfrac{4,98-5}{0,01} \leq Z \leq \dfrac{5-5}{0,01}\right) = P(-2 \leq Z \leq 0) =$
$P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 2)) =$
$P(Z \leq 0) + P(Z \leq 2) - 1 = 0,5 + 0,9772 - 1 = 0,4772$

5.11. Galicia

5.11.1. Modelo de 2020

Problema 5.11.1 En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25°C y desviación típica 4°C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21°C y 27,2°C. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

Solución:

$$N(25, 4)$$

$$P(21 \leq X \leq 27,2) = P\left(\frac{21-25}{4} \leq\leq Z \leq \frac{27,2-25}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0,55) =$$

$$P(Z \leq 0,55) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0,55) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0,7088 - (1 - 0,8413) = 0,5501$$

Como julio tiene 31 días: $31 \cdot P(21 \leq X \leq 27,2) = 31 \cdot 0,5501 = 17,0531 \simeq 17$ días aproximadamente.

5.11.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.11.2 En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

Solución:

$$N(20, 4)$$

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \leq Z \leq \frac{26-20}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1,5) =$$

$$P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1,5) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0,9332 - (1 - 0,8413) = 0,7745$$

5.11.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.11.3 Se pide:

a) En una determinada población de árboles, el 20 % tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si X sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \le 18) = 0,6915$, ¿cuál es la desviación típica?

Solución:

a) $B(40; 0,2)$. Tenemos $n > 10$, $np = 40 \cdot 0,2 = 8 > 5$ y $nq = 40 \cdot 0,8 = 32 > 5 \Longrightarrow$ la binomial se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(8; 2,53)$
$P(X = 4) = P\left(\dfrac{3,5-8}{2,53} \le Z \le \dfrac{4,5-8}{2,53}\right) = P(-1,78 \le Z \le -1,38) = P(X \le -1,38) - P(X \le -1,78) = P(X \le 1,78) - P(X \le 1,38) = 0,9625 - 0,9162 = 0,0463$
$P(X = 4) = \begin{pmatrix} 40 \\ 4 \end{pmatrix} 0,2^4 0,8^{36} = 0,04745$

b) $N(15; \sigma) \Longrightarrow P(X \le 18) = P\left(Z < \dfrac{18-15}{\sigma}\right) = 0,691 \Longrightarrow \dfrac{3}{\sigma} = 0,5 \Longrightarrow \sigma = 6$

5.12. Islas Baleares

5.12.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.12.1 El número de horas de vida de una cierta bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica de 0,75 horas. Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un bacteria:

a) su número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas.

b) su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas.

De otra bacteria (tipo B) se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce su desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad de que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B.

Solución:

$$N(110; 0,75)$$

a) $P(X \ge 112,25) = P\left(Z \ge \dfrac{112,25-110}{0,75}\right) = P(Z \ge 3) = 1 - P(Z \le 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$

b) $P(X \le 109,25) = P\left(Z \le \dfrac{109,25-110}{0,75}\right) = P(Z \le -1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$

$$N(110; \sigma)$$

$$P(X \ge 125) = P\left(Z \ge \frac{125-110}{\sigma}\right) = 0,1587 \Longrightarrow P\left(Z \le \frac{15}{\sigma}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413 \Longrightarrow$$

$$\frac{15}{\sigma} = 1 \Longrightarrow \sigma = 15$$

5.12.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.12.2 El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con peso superior a 57 kg?

b) ¿Qué porcentaje de personas pesan entre 50 y 57 kg?

c) Si se elige una persona al azar que está dentro del 70 % de las personas que menos pesan, como a máximo, cuantos kilos debería pesar?

Solución:

$$N(54,3; 6,5)$$

a) $P(X \geq 57) = P\left(Z \geq \frac{57-54,3}{6,5}\right) = P(Z \geq 0,42) = 1 - P(Z \leq 0,42) = 1 - 0,6628 = 0,3372$

b) $P(50 \leq X \leq 57) = P\left(\dfrac{50-54,3}{6,5} \leq Z \leq \dfrac{57-54,3}{6,5}\right) = P(-0,66 \leq Z \leq 0,42) =$ $P(Z \leq 0,42) - P(Z \leq -0,66) = P(Z \leq 0,42) - (1 - P(Z \leq 0,66)) = 0,6628 - (1 - 0,7454) =$ $0,4082$

c) $P(X \leq a) = 0,7 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a-54,3}{6,5}\right) = 0,7 \Longrightarrow \dfrac{a-54,3}{6,5} = 0,525 \Longrightarrow$ $a = 57,7125$ kg.

5.13. Islas Canarias

5.13.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.13.1 El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

a) ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento?

b) ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso?

Solución:

$$N(1500; 200)$$

a) $P(X \leq 1000) = P\left(Z \leq \dfrac{1000-1500}{200}\right) = P(Z \leq -2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0,9938 =$ $0,0062 \Longrightarrow 0,62\,\%$

b) $P(1000 \leq X \leq 2000) = P\left(\dfrac{1000-1500}{200} \leq Z \leq \dfrac{2000-1500}{200}\right) = P(-2,5 \leq Z \leq 2,5) =$ $P(Z \leq 2,5) - P(Z \leq -2,5) = P(Z \leq 2,5) - (1 - P(Z \leq 2,5)) = 2P(Z \leq 2,5) - 1 =$ $2 \cdot 0,9938 - 1 = 0,9876 \Longrightarrow 98,76\,\%$

Problema 5.13.2 Se sabe que el 8 % de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

a) Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto.

b) Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3 %. Justifique si es cierto.

c) Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8.

Solución:

$$B(10; 0,08)$$

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left[\binom{10}{0} 0,08^0 0,92^{10} + \binom{10}{1} 0,08^1 0,92^9 + \binom{10}{2} 0,08^2 0,92^8\right] = 0,04$

b) $P(X = 3) = \binom{10}{3} 0,08^3 0,92^7 = 0,0343 \Longrightarrow 3,43\,\% > 3\,\%$ Luego la afirmación del problema no es cierta.

c) $B(100; 0,92) \Longrightarrow E[X] = np = 100 \cdot 0,92 = 92$ análisis correctos y 8 erróneos.

5.13.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.13.3 Si una bombilla fluorescente presenta un 90 % de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30 % tienen una vida útil de al menos 800 horas.

b) La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7.

c) El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10.

Solución:

$$B(20; 0,9)$$

a) $P(X = 18) = \binom{20}{18} 0,9^{18} 0,1^2 = 0,2852 = 28,52\,\% < 30\,\% \Longrightarrow$ no se cumple la afirmación de más del 30 %.

b) que dos o más bombillas tengan una duración menor de 800 horas es lo mismo que 18 o más bombillas tengan una duración superior de 800 horas.
$P(X \geq 18) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{18} 0,9^{18} 0,1^2 + \binom{20}{19} 0,9^{19} 0,1^1 + \binom{20}{20} 0,9^{20} 0,1^0 = 0,67693 < 0,7$ la afirmación si se cumple.

c) $np = 100 \cdot 0,9 = 90 \Longrightarrow$ la afirmación no es correcta.

5.14. La Rioja

5.14.1. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.14.1 Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0,1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Solución:

$$X \approx N(25; \sigma_x), \quad Y \approx N(25; \sigma_y)$$

$P(X \geq 27) = P\left(Z \geq \dfrac{27-25}{\sigma_x}\right) = 0,1587 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{27-25}{\sigma_x}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413 \Longrightarrow$
$\dfrac{2}{\sigma_x} = 1 \Longrightarrow \sigma_x = 2 \Longrightarrow Var(X) = {\sigma_x}^2 = 4$

$P(Y \geq 30) = P\left(Z \geq \dfrac{30-25}{\sigma_y}\right) = 0,1587 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{30-25}{\sigma_y}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413 \Longrightarrow$
$\dfrac{5}{\sigma_y} = 1 \Longrightarrow \sigma_y = 5 \Longrightarrow Var(X) = {\sigma_y}^2 = 25$

5.14.2. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.14.2 La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

$$N(15; 4)$$

a) $P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \dfrac{10-15}{4}\right) = P(Z \leq -1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$

b) $P(11 \leq X \leq 19) = P\left(\dfrac{11-15}{4} < Z < \dfrac{19-15}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$
$= P(Z \leq 1) - P(Z < -1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1)) =$

$= 0,8413 - 1 + 0,8413 = 0,6826$

5.15. Madrid

5.15.1. Modelo de 2020

Problema 5.15.1 En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C.

b) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C.

c) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

Solución:

$$\sigma^2 = Var(X) = 25 \Longrightarrow \sigma = 5 \Longrightarrow N(30, 5)$$

a) $P(28 \le X \le 32) = P\left(\frac{28-30}{5} \le Z \le \frac{32-30}{5}\right) = P(-0,4 \le Z \le 0,4) = P(Z \le 0,4) - P(Z \le -0,4) = P(Z \le 0,4) - (1 - P(Z \le 0,4)) = 2P(Z \le 0,4) - 1 = 2 \cdot 0,6554 - 1 = 0,3108$

b) $P(X \ge 36) = P\left(Z \ge \frac{36-30}{5}\right) = P(Z \ge 1,2) = 1 - P(Z \le 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151.$
Como el mes de junio tiene 30 días tendremos $30P(X \ge 36) = 30 \cdot 0,1151 = 3,453 \Longrightarrow$ entre 3 o 4 días se superaran los 36° de temperatura.

c) $P(X \ge a) = P\left(Z \ge \frac{a-30}{5}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-30}{5}\right) = 0,5 \Longrightarrow \frac{a-30}{5} = 0 \Longrightarrow a = 30^\circ$

5.15.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.15.2 Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

a) La probabilidad P_1 de que no se lance la cuarta flecha será:
P_1 = probabilidad de acertar en el primer lanzamiento + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y acertar el segundo + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y fallar el segundo lanzamiento y acertar el tercer lanzamiento $= 0,3 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,79$

b) P_2 = probabilidad de no acierta en la primera y no acierta en la segunda y no acierta en la tercera y no acierta en la cuarta $= 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$

c) $B(10; 0,85)$:

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04$$

5.15.3. Convocatoria Ordinaria junio de 2020-coincidente

Problema 5.15.3 El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0,2$, se pide:

a) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.

b) Calcular el valor x_0 tal que $P(X < x_0) = 0,2$.

Solución:

$$N(3353;\sigma)$$

a) $P(X\ge 3693)=P\left(Z\ge\dfrac{3693-3353}{\sigma}\right)=1-P\left(Z\le\dfrac{340}{\sigma}\right)=0,2\Longrightarrow P\left(Z\le\dfrac{340}{\sigma}\right)=0,8\Longrightarrow\dfrac{340}{\sigma}=0,845\Longrightarrow\sigma=402,37$ gramos.

b) $P(X\le x_0)=P\left(Z\le\dfrac{x_0-3353}{402,37}\right)=1-P\left(Z\le-\dfrac{x_0-3353}{402,37}\right)=0,2\Longrightarrow$
$P\left(Z\le-\dfrac{x_0-3353}{402,37}\right)=0,8\Longrightarrow-\dfrac{x_0-3353}{402,37}=0,845\Longrightarrow x_0=3013$ gramos.

5.15.4. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.15.4 En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X)=0,4$ y que $P(X\cap\overline{Y})=0,08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) Calcular $P(Y)$.

b) Calcular $P(X\cup Y)$.

c) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución:
Tenemos $P(X\cap Y)=P(X)P(Y)$, $P(X)=0,4$ y $P(X\cap\overline{Y})=0,08$

a) $P(X\cap\overline{Y})=P(X)-P(X\cap Y)\Longrightarrow P(X\cap Y)=P(X)-P(X\cap\overline{Y})=0,4-0,08=0,32$
$P(X\cap Y)=P(X)P(Y)\Longrightarrow 0,32=0,4P(Y)\Longrightarrow P(Y)=\dfrac{0,32}{0,4}=0,8$

b) $P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y)=0,4+0,8-0,32=0,88$.

c) $p=P(\overline{X})=1-P(X)=0,6$ y sea A el nº de aciertos con probabilidad p. Se trata de una distribución binomial $B(8;0,6)$.

$$P(A\ge 2)=1-(P(A=0)+P(A=1))=$$

$$1-\left[\binom{8}{0}0,6^0\cdot 0,4^8+\binom{8}{1}0,6^1\cdot 0,4^7\right]=0,99148032$$

5.16. Murcia

5.16.1. Modelo de 2020

Problema 5.16.1 El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

a) $P(X \le 5061,2) = 0,6950$ y $P(X \ge 5116,4) = 0,1660 \Longrightarrow P(X \le 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$

$$P(5061,2 \le X \le 5116,4) = P(X \le 5116,4) - P(X \le 5061,2) = 0,834 - 0,695 = 0,139$$

b)

$$P(X \le 5061,2) = \left(\frac{5061,2-\mu}{\sigma}\right) = 0,6950 \Longrightarrow \frac{5061,2-\mu}{\sigma} = 0,51 \Longrightarrow 0,51\sigma + \mu = 5061,2$$

$$P(X \le 5116,4) = \left(\frac{5116,4-\mu}{\sigma}\right) = 0,834 \Longrightarrow \frac{5116,4-\mu}{\sigma} = 0,97 \Longrightarrow 0,97\sigma + \mu = 5116,4$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0,51\sigma + \mu = 5061,2 \\ 0,97\sigma + \mu = 5116,4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = 5000 \\ \sigma = 120 \end{array}\right.$$

5.16.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.16.2 Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.
Solución:

a) $B(9, 0, 4)$

b) Media$= np = 9 \cdot 0,4 = 3,6$ y la desviación típica$= \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,4697$

c) $P(X \le 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{9}{0} 0,4^0 0,6^9 + \binom{9}{1} 0,4^1 0,6^8 + \binom{9}{2} 0,4^2 0,6^7 + \binom{9}{3} 0,4^3 0,6^6 + \binom{9}{4} 0,4^4 0,6^5 = 0,7334$

5.16.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2020

Problema 5.16.3 El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que sólo el 20,05 % de ellos pesa más de 3 kg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.
Solución:

a)
$$N(2,8;\sigma)$$

$$P(X \geq 3) = P\left(Z \geq \frac{3-2,8}{\sigma}\right) = 0,2005 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{0,2}{\sigma}\right) = 1 - 0,2005 = 0,7995 \Longrightarrow \frac{0,2}{\sigma} = 0,84 \Longrightarrow \sigma = 0,2381$$

$$N(2,8;0,2381)$$

$$P(X \geq 2,6) = P\left(Z \geq \frac{2,6-2,8}{0,2381}\right) = P(Z \geq -0,84) = P(Z \leq 0,84) = 0,7995$$

b) Calculada en el apartado anterior.

c) $P(X \leq 2,9) = P\left(Z \leq \dfrac{2,9-2,8}{0,2381}\right) = P(Z \leq 0,42) = 0,6628$

5.17. Navarra

No pusieron problemas de estadística.

5.18. País Vasco

5.18.1. Modelo de 2020

Problema 5.18.1 Lanzamos un dado de seis caras 6000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5

a) sea superior a 1500.

b) esté comprendido entre 1000 y 1100.

Solución:
$B(6000;0,167),\ n = 6000 > 10,\ np = 6000 \cdot 0,167 = 1000 > 5,\ nq = 6000 \cdot 0,833 = 5000 > 5 \Longrightarrow B(6000;0,167) \approx N(np,\sqrt{npq}) = N(1000,28,87)$

a) $P(X > 1500) = P\left(Z > \dfrac{1500,5-1000}{28,87}\right) = P(Z > 17,34) = 1 - P(Z < 17,34) = 1 - 1 = 0$

b) $P(1000 \leq X \leq 1100) = P\left(\dfrac{999,5-1000}{28,87} < Z < \dfrac{1100,5-1000}{28,87}\right) =$
$P(-0,02 < Z < 3,48) = P(Z < 3,48) - P(Z < -0,02) =$
$P(Z < 3,48) - (1 - P(Z < 0,02)) = 1 - 1 + P(Z < 0,02) = 0,5080$

5.18.2. Convocatoria Ordinaria junio de 2020

Problema 5.18.2 En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:
$B(6000; 0,167)$, $n = 6000 > 10$, $np = 6000 \cdot 0,167 = 1000 > 5$, $nq = 6000 \cdot 0,833 = 5000 > 5 \Longrightarrow$
$B(6000; 0,167) \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(1000, 28, 87)$

a) Se trata de una binomial $B(30; 0,4)$, $n = 30 > 10$, $np = 30 \cdot 0,4 = 12 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0,6 = 18$. La distribución binomial se puede aproximar mediante una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(12; 2,6833)$

b) $P(X = 8) = \binom{30}{8} 0,4^8 0,6^{22} = 0,0505$. De otra manera:
$P(X = 8) = P(7,5 \le X \le 8,5) = P\left(\frac{7,5-12}{2,6833} \le Z \le \frac{8,5-12}{2,6833}\right) =$
$P(-1,68 \le Z \le -1,30) = P(Z \le -1,30) - P(Z \le -1,68) =$
$(1 - P(Z \le 1,30)) - (1 - P(Z \le 1,68)) = P(Z \le 1,68) - P(Z \le 1,30) = 0,9535 - 0,9032 = 0,0503$

c) $P(10 \le X \le 20) = P\left(\frac{9,5-12}{2,6833} \le Z \le \frac{20,5-12}{2,6833}\right) = P(-0,93 \le Z \le 3,17) =$
$P(Z \le 3,17) - P(Z \le -0,93) = P(Z \le 3,17) - (1 - P(Z \le 0,93)) =$
$P(Z \le 3,17) + P(Z \le 0,93) - 1 = 0,9992 + 0,8238 - 1 = 0,823$

5.18.3. Convocatoria Extraordinaria julio de 2019

Problema 5.18.3 Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10; 0,1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.

b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Solución:

$$N(10; 0,1)$$

a) $P(9,8 \le X \le 10,1) = P\left(\frac{9,8-10}{0,1} \le Z \le \frac{10,1-10}{0,1}\right) = P(-2 \le Z \le 1) =$
$P(Z \le 1) - P(Z \le -2) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 2)) = 0,8413 - 1 + 0,9772 = 0,8185$
Esta probabilidad corresponde a no defectuoso, luego $P(\text{defectuoso}) = 1 - 0,8185 = 0,1815$.

b) $E[X] = nP(\text{defectuoso}) = 1500 \cdot 0,1815 = 272,25 \simeq 273$ recipientes defectuosos.