Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Ordinaria 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 El barómetro de octubre de 2025 del Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS) recoge las entrevistas realizadas a una muestra de 4029 personas. La Pregunta 10R plantea al entrevistado: "¿Cuál es, a su juicio, el principal problema que existe actualmente en España? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?". De los 333 entrevistados entre 18 y 24 años, un 35,5 % mencionan como alguno de los tres problemas "la vivienda", un 26,7 % "la inmigración" y un 25,1 % "los problemas relacionados con la calidad del empleo". En los barómetros de septiembre y julio de 2025, "la vivienda" fue mencionada como respuesta a la Pregunta 10R por el 31,9 % y el 29,3 % de los jóvenes en la misma franja de edad, respectivamente.

a) (1,5 puntos) Calcule el intervalo de confianza al 95 % para la proporción de jóvenes de 18 a 24 años que consideran la vivienda como uno de los tres principales problemas de España en octubre de 2025.

b) (1 punto) Para el barómetro de noviembre se desea volver a estimar la proporción de jóvenes de 18 a 24 años que consideran la vivienda como uno de los tres principales problemas de España. Se quiere que esta estimación tenga un margen de error de cinco puntos porcentuales y un nivel de confianza del 97 %. Calcule el tamaño de muestra que sería necesario asumiendo que la proporción es $p = 0,355$.

Solución:

a) $n = 333$, $\hat{p} = 0,355 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,645$ y $NC = 0,95 \Longrightarrow 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,355 \cdot 0,645}{333}} = 0,0514$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,355 - 0,0514; 0,355 + 0,0514) = (0,3036; 0,4064)$

b) $E = 0,05$ y $NC = 0,97 \Longrightarrow 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$

$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 2,17\sqrt{\dfrac{0,355 \cdot 0,645}{n}} \Longrightarrow n = 431,2881 \Longrightarrow n = 432.$

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 2 (2,5 puntos)

a) (2,5 puntos) Considera la función real de variable real $f(x) = x(1 - x^2) + e^{-\lambda x}$, donde λ es un parámetro real sin especificar.

a.1. (1 punto) Calcule $F(x)$, la primitiva de $f(x)$, tal que $F(0) = 1$.

a.2. (1 punto) Obtenga el área entre la curva de $f(x)$ y el eje horizontal en el intervalo $[0, 1]$.

a.3. (0,5 puntos) ¿Para qué valores de λ es $f'(0)$ positiva?

b) Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+x^3}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

b.1. (0,5 puntos) Determine razonadamente el dominio de $f(x)$.

b.2. (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b.3. (0,5 puntos) Calcule la asíntota de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$.

b.4. (1 punto) Calcule las asíntotas de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$.

Solución:

a) $f(x) = x - x^3 + e^{-\lambda x}$

a.1. $F(x) = \displaystyle\int (x - x^3 + e^{-\lambda x})\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + C$

$F(0) = 0 - 0 - \dfrac{1}{\lambda} + C = 1 \Longrightarrow C = 1 + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\lambda+1}{\lambda}$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \dfrac{\lambda+1}{\lambda}$ con $\lambda \neq 0$

a.2. La función es positiva en el intervalo $[0, 1]$ y sólo hay un recinto de integración: $S = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda})\ u^2$ con $\lambda \neq 0$

a.3. $f'(x) = 1 - 3x^2 - \lambda e^{-\lambda x} \Longrightarrow f'(0) = 1 - \lambda \Longrightarrow f'(0) > 0\ \forall \lambda \in (-\infty, 1)$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+x^3}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

b.1. En la rama $x < 0$ el denominador no se anula en la rama y en la otra rama el denominador no se anula nunca, luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b.2. Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^2+1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \xRightarrow{\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$$

f es discontinua no evitable en $x = 0$ (Hay un salto)

b.3. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x+2}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$

b.4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x^3}{x^2+1} = \infty \Longrightarrow$ no hay asíntota horizontal. Estudiamos la oblicua $y = mx+n$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x^3}{x^3+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x^3-x^3-x}{x^2+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}\right) = 1 \Longrightarrow y = x+1$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) (2,5 puntos) Considere las siguientes matrices:
$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

a.1. (1,5 puntos) Calcule la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$.

a.2. (1 punto) Calcule el determinante $|C^2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^t$.
Nota: M^t denota la matriz traspuesta de la matriz M.

b) (2,5 puntos) Considere la región S del plano delimitada por las siguientes restricciones:

$$x \le 6,\ \ 3y-2x \le 10,\ \ 3y \ge 2-2x,\ \ x \le 10-y,\ \ y \ge x-6.$$

b.1. (2,0 puntos) Calcule las coordenadas de los vértices de S y represente gráficamente la región S.

b.2. (0,5 puntos) Se desea minimizar el triple de y menos la mitad de x en S. Indique el valor mínimo y el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución:

a) a.1. Tenemos $|A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}$ y

$|B| = \dfrac{1}{8} \Longrightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$AXB = A+B \Longrightarrow X = A^{-1}(A+B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & 13/4 \end{pmatrix}$

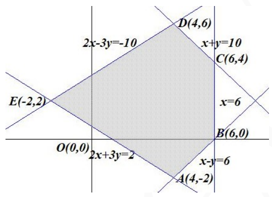
a.2. $|C| = |2(A^{-1})^t| = 2^3|A^{-1}| = 8 \cdot \dfrac{1}{|A|} = 8$

$|C^2| = |C|^2 = 64$

$|C^2B| = |C^2| \cdot |B| = 64 \cdot \dfrac{1}{8} = 8$

b) b.1. La región factinle es:

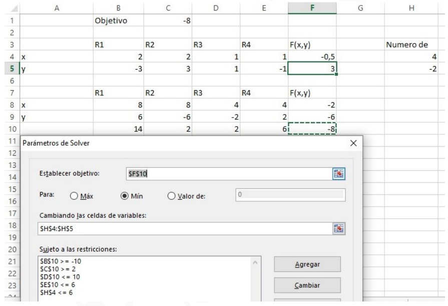
$$\begin{cases} x \leq 6 \\ 3y - 2x \leq 10 \\ 3y \geq 2 - 2x \\ x \leq 10 - y \\ y \geq x - 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ 2x - 3y \geq -10 \\ 2x + 3y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ x - y \leq 6 \end{cases}$$



Los vértices son $A(4,-2)$, $B(6,0)$, $C(6,4)$, $D(4,6)$ y $E(-2,2)$

b.2. $f(x,y) = 3y - \dfrac{x}{2}$

Solución con solver:



$$\begin{cases} f(4,-2) = -8 \Longleftarrow \text{Mínimo} \\ f(6,0) = -3 \\ f(6,4) = 9 \\ f(4,6) = 16 \\ f(-2,2) = 7 \end{cases}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto $A(4,-2)$ con un valor de -8.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Sean A, B y C tres sucesos de los que se conoce la siguiente información:
$P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$, $P(C) = 0,5$
$P(A|C) = 0,6$, $P(B|C) = 0,8$
$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$, $P(A \cap B|\overline{C}) = 0,08$

a.1. (1 punto) Determine si A y B son independientes.

a.2. (1,5 puntos) Determine la probabilidad de que C ocurra sabiendo que A y B ocurrieron.
Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario (contrario) del suceso S.

b) En un laboratorio farmacéutico se realiza un test de control de calidad para detectar productos defectuosos antes de su distribución. Se conoce la siguiente información:

- El 3 % de los productos presenta un defecto grave, el 7 % un defecto leve y el resto no presenta defectos.
- Si el defecto es grave, el test da positivo el 98 % de las veces.
- Si el defecto es leve, el test da positivo el 80 % de las veces.
- Si el producto no tiene defectos, el test da positivo el 5 % de las veces.

b.1. (1,2 puntos) Calcule la probabilidad de que el test de un producto seleccionado al azar dé negativo.

b.2. (1,3 puntos) Si el test de un producto ha dado positivo, calcule la probabilidad de que el defecto sea grave.

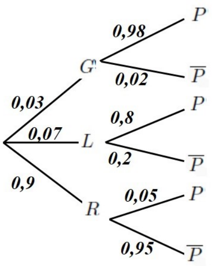
Solución:

a) Sean A, B y C tres sucesos de los que se conoce la siguiente información:
$P(A) = 0,4,\ P(B) = 0,6,\ P(C) = 0,5$
$P(A|C) = 0,6,\ P(B|C) = 0,8$
$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C),\ P(A \cap B|\overline{C}) = 0,08$

a.1. Tenemos $P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$.
Por el teorema de la probabilidad total:
$P(A \cap B) = P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$P(A|C)P(B|C)P(C) + P(A \cap B|\overline{C})(1 - P(C)) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5 + 0,08 \cdot 0,5 = 0,28$
Como $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

a.2. $P(C|A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B|C)P(C)}{P(A \cap C)} = \dfrac{P(A|C)P(B|C)P(C)}{P(A \cap C)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,5}{0,28} \simeq 0,8571$

b) Sean G defecto grave, L leve, R resto, P positivo y $\overline{P}$ negativo.



b.1. $P(\overline{P}) = P(\overline{P}|G)P(G) + P(\overline{P}|L)P(L) + P(\overline{P}|R)P(R) =$
$0,02 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,07 + 0,95 \cdot 0,9 = 0,8696$

b.2. $P(G|P) = \dfrac{P(P|G)P(G)}{P(P)} = \dfrac{0,98 \cdot 0,03}{1 - 0,8696} = 0,2255$