Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 En la Comunidad Autónoma de Aragón se encuentra la única Denominación de Origen Protegida (DOP) de melocotón, el *Melocotón de Calanda*, que celebró su 26º aniversario en 2025. El Departamento de Agricultura de Aragón registró comercialmente para la DOP tres variedades tradicionales de este producto, *Jesca, Calante y Evaisa*. La DOP exige unas características que deben cumplir sus frutos en cuanto a su aspecto, coloración, calibre, dureza, contenido en azúcar, etc.

a) (1 punto) La información recogida durante estos años permite indicar que el peso de los melocotones de la variedad Jesca puede ser aproximado por una distribución normal con desviación típica 50 gramos. Determine el número mínimo de melocotones que sería necesario seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar el peso medio de los melocotones de esta variedad de manera que, con un nivel de confianza del 96,8 %, el margen de error en la estimación no supere los 15 gramos.

b) (1,5 puntos) Durante los dos últimos meses de crecimiento, los melocotones de la DOP *Melocotón de Calanda* permanecen embolsados uno a uno en el propio árbol mediante bolsas protectoras que garantizan su pureza y evitan el contacto con productos fitosanitarios. Se calcula que en la última campaña se embolsaron unos 250 millones de melocotones. Pese a ello, las tormentas de verano con granizo pueden dañar un 5 % de los frutos. En una cooperativa de las empresas certificadas se reciben melocotones para su comercialización como DOP y se inspecciona una muestra aleatoria simple de 400 melocotones. Obtenga el número esperado de melocotones no dañados y calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados.

Solución:

a) $N(\mu; 50)$ y $NC = 96,8\,\%$:
$0,968 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,032 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,016$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,016 = 0,984 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,145$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 15 = 2,145\dfrac{50}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 51,1225 \Longrightarrow n = 52$ melocotones.

b) La probabilidad de que un melocotón no esté dañado es $p = 0,95$, el número de melocotones que esperamos que no estén dañados en una muestra de $n = 400$ es $E(X) = np = 0,95 \cdot 400 = 380$ melocotones.
Tenemos $B(400; 0,95)$, como $n > 30$, $np = 380 > 5$ y $nq = 0,05 \cdot 400 = 20 > 5 \Longrightarrow B(400; 0,95) \overset{N(np;\sqrt{npq})}{\approx} N(380; 4,359)$
$P(X \ge 375) = P\left(Z \ge \dfrac{374,5 - 380}{4,359}\right) = P(Z \ge -1,26) = P(Z \le 1,26) = 0,8962$

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a.1 (1,5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I+2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

a.2 (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \dfrac{B^tB}{|BB^t|}$.

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

b) El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

Solución:

a) a.1 $(I+2C^t)^{-1} = A \Longrightarrow \left[(I+2C^t)^{-1}\right]^{-1} = A^{-1} \Longrightarrow I + 2C^t = A^{-1} \Longrightarrow$

$$C^t = \frac{1}{2}(A^{-1} - I) \Longrightarrow C = \left[\frac{1}{2}(A^{-1} - I)\right]^t = \frac{1}{2}\left(A^{-1} - I\right)^t$$

$$A^{-1} - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(A^{-1} - I\right)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a.2 $$B^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow |BB^t| = 3$$

$$D^t = \frac{B^tB}{|BB^t|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{D=(D^t)^t}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Sean x los gramos contenidos en una caja de papel, y de plástico y z de metal.

$$\left\{\begin{array}{l} 15x+4y=4y+3z \\ x+y=z-5 \\ 5y+1=2(x+z) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x-z=0 \\ x+y-z=-5 \\ 2x-5y+2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=7 \\ z=15 \end{array}\right.$$

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-5F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & 25 \\ 0 & -7 & 4 & 11 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3-7F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & -8 & -120 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -8z=-120 \Longrightarrow z=15 \\ -5y+60=25 \Longrightarrow y=7 \\ x+7-15=-5 \Longrightarrow x=3 \end{array}\right.$$

La caja de papel contiene 3 gramos, la de plástico 7 gramos y la de metal 15 gramos.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Dada la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x-1}{3-x} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{2-x}{3+x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{array}\right.$$

a.1 (1,3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en el punto $x=1$ y determine sus asíntotas.

a.2 (1,2 puntos) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x)=(3x^2+9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=3$.

b) Dada la función real de variable real $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{a}$ donde $a>0$ es un parámetro real.

b.1 (1,2 puntos) Determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b.2 (1,3 puntos) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva, $F(x)$, que verifique $F(0)=2$ y $F(3)=7$.

Solución:

a) a.1 Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{3-x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{3+x}=\dfrac{1}{4}=f(1) \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}$$

f tiene una discontinuidad no evitable en $x=1$ con un salto finito.

Asíntotas:

- Si $x<1$ no tiene verticales, ya que el valor que anula el denominador es $x=3$ y no está en la rama.

  Tiene una asíntota horizontal en $y=-1$, ya que

  $$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{3-x}=-1$$

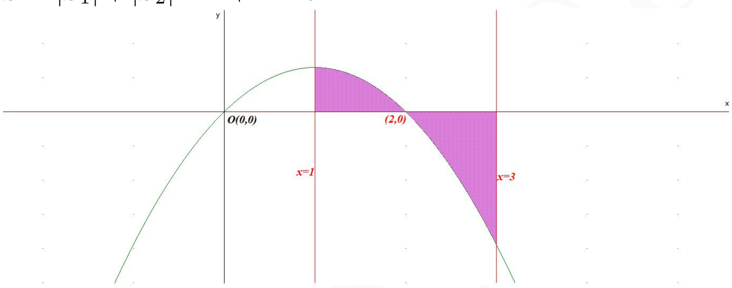
  No tiene asíntotas oblicuas por tener una horizontal.

- ☛ Si $x \geq 1$ no tiene verticales, ya que el valor que anula el denominador es $x = -3$ y no está en la rama.
  Tiene una asíntota horizontal en $y = -1$, ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x}{3 + x} = -1$$

  No tiene asíntotas oblicuas por tener horizontales.

a.2 Si $x \in [1, 3] \Longrightarrow g(x) = (3x^2 + 9x)f(x) = \dfrac{(2 - x)(3x^2 + 9x)}{3 + x} = -3x^2 + 6x$
Analizamos si $g(x)$ corta al eje de abscisas en algún punto del intervalo $(1, 3)$.
$g(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$. Luego hay dos recintos de integración $S_1 : [1, 2]$ y $S_2 : [2, 3]$.
$S_1 = \displaystyle\int_1^2 (-3x^2 + 6x)\, dx = -x^3 + 3x^2\Big]_1^2 = 2$
El resultado de la integral es positiva por estar la función por encima del eje de abscisas en el intervalo $(1, 2)$.
$S_2 = \displaystyle\int_2^3 (-3x^2 + 6x)\, dx = -x^3 + 3x^2\Big]_2^3 = -4$
El resultado de la integral es negativa por estar la función por debajo del eje de abscisas en el intervalo $(2, 3)$.
$S = |S_1| + |S_2| = 2 + 4 = 6\ u^2$



b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{a}$, $a > 0$

1. ☛ Puntos de corte:
   - Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{2x^2 - 3x}{a} = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 3x = x(2x - 3) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

   ☛ $f'(x) = \dfrac{4x - 3}{a} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

	$(-\infty, 3/4)$	$(3/4, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

   La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right)$ y creciente en el $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ con un mínimo relativo en $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{9}{8a}\right)$

2. $F(x) = \int \dfrac{2x^2 - 3x}{a}\, dx = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}\right) + C$

$F(0) = 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{0}{3} - \dfrac{0}{2}\right) + C = 2 \Longrightarrow C = 2$

$F(3) = 7 \Longrightarrow \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{54}{3} - \dfrac{27}{2}\right) + 2 = 7 \Longrightarrow a = \dfrac{9}{10}$

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) De dos sucesos A y B sabemos que: $P(B) = 0,5$, $P(A|B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,8$.

a.1 (0,8 puntos) Obtenga la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

a.2 (0,7 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A.

a.3 (1 punto) Justifique razonadamente si los sucesos A y B son independientes.

b) En una comunidad de vecinos se ha realizado una votación para analizar la conveniencia de instalar placas solares como medida de ahorro energético. El 26 % de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra. Un 10 % de los que votaron en blanco son propietarios que tienen la vivienda alquilada. Entre los propietarios favorables a esta medida, un 18 % también la tienen alquilada y sólo un 5 % la tienen alquilada entre los propietarios que votaron en contra. Como no hay voluntarios, el presidente de la Comunidad para el próximo año se elegirá por sorteo entre los propietarios de todas las viviendas.

b.1 (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el futuro presidente de la comunidad de vecinos tenga la vivienda alquilada?

b.2 (1,5 puntos) Una vez realizado el sorteo, se comprueba que el nuevo presidente no tiene su vivienda alquilada. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera a favor de la instalación de placas solares en la votación realizada?

Solución:

a) Tenemos: $P(B) = 0,5$, $P(A|B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,8$.

1. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$
2. $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - P(A|B)P(B) = 0,5 - 0,2 \cdot 0,5 = 0,4$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,8 = P(A) + 0,5 - 0,2 \cdot 0,5 \Longrightarrow P(A) = 0,4$
   $P(A \cap B) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$
   $P(A)P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) Sean S votan a favor, C votan en contra, N se abstienen, A tienen casa en alquiler y $\overline{A}$ no tienen casa en alquiler.

1. $P(A) = P(A|N)P(N) + P(A|S)P(S) + P(A|C)P(C) = 0,1 \cdot 0,26 + 0,18 \cdot 0,37 + 0,05 \cdot 0,37 = 0,1111$
2. $P(S|\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}|S)P(S)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,82 \cdot 0,37}{1 - 0,1111} = 0,3413$