Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2025

Problema 1 (5 puntos)

a) (2,5 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I (1,25 puntos) Se pide hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$

II (1,25 puntos) Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $AYA^{-1} = I$

b) (2,5 puntos) Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

I (1 punto) Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

II (1 punto) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

III (0,5 puntos) Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

Solución:

a) I $X^{-1}A + A = B \Longrightarrow X^{-1}A = B - A \Longrightarrow X^{-1} = (B - A)A^{-1} \Longrightarrow$
$(X^{-1})^{-1} = ((B - A)A^{-1})^{-1} \Longrightarrow X = (A^{-1})^{-1}(B - A)^{-1} = A(B - A)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II $AYA^{-1} = I \Longrightarrow A^{-1}AYA^{-1}A = A^{-1}IA \Longrightarrow Y = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)

c) Sea x el número de lotes clásicos, y el número de lotes selección y z el número de lotes premium.

a.I $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=33 \\ 20x+30y+45z=855 \\ x=3y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=33 \\ 4x+6y+9z=171 \\ x-3y=0 \end{array}\right.$

a.II $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=18\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$número de incógnitas. Luego se trata de un sistema compatible determinado (Solución única)

a.III Por Gauss: (Reordeno las ecuaciones)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-4F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 33 \\ 0 & 18 & 9 & 171 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-9F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 33 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9z=45 \Longrightarrow z=5 \\ 4y+5=33 \Longrightarrow y=7 \\ x-21=0 \Longrightarrow x=21 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=21 \text{ de Lote Clásico} \\ y=7 \text{ de Lote Selección} \\ z=5 \text{ de Lote Premium} \end{array}\right.$$