Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2025

Problema 1 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

b) (1,25 puntos) Clasifique el sistema de ecuaciones (S) utilizando el teorema de Rouché- Frobenius y, si es posible, calcule la solución.

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{array}\right.$$

Solución:

a) $AX + 2A = A^2 \Longrightarrow AX = A^2 - 2A \Longrightarrow X = A^{-1}(A^2 - 2A) =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] =$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 4 \neq 0 \Longrightarrow$

Rango(A) = 3 =Rango$(\overline{A})$ =número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) =$

$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} -2z = 2 \Longrightarrow z = -1 \\ -2y - 2 = -2 \Longrightarrow y = 0 \\ x - 2 = -4 \Longrightarrow x = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right.$

Problema 2 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Dado el sistema: $\left\{\begin{array}{l} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{array}\right.$

a.1 (0,75 puntos) Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso.

a.2 (0,5 puntos) Para $m = 3$, ¿pueden ser $(x, y) = (3, 0)$ y $(x, y) = (2, -2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m = 3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta.

b) (1,25 puntos) Sean las matrices
$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

b.1 (0,75 puntos) Si $\dfrac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b.2 (0,5 puntos) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución:

a) $\left\{ \begin{array}{l} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{M} = \left(\begin{array}{cc|c} m-1 & m-4 & 6 \\ 2 & -1 & 2m \end{array} \right)$

a.1 $|M| = 9 - 3m = 0 \Longrightarrow m = 3$
Si $m \neq 3 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{M}) = 2 =$Rango$(M) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
Si $m = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x - 4y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2/3 \\ y = -4/3 \end{array} \right.$

a.2 Si $m = 3$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$
Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones) La solución del sistema es cualquier punto que cumpla $2x - y = 6$ o bien $\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
El punto $(3, 0) \Longrightarrow 2 \cdot 3 - 0 = 6$, luego es una de las infinitas soluciones posibles.
El punto $(2, -2) \Longrightarrow 2 \cdot 2 - (-2) = 6$, luego es una de las infinitas soluciones posibles.

b) b.1 $\dfrac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = \dfrac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3m \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{array} \right.$

b.2 $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 3 \\ m & 4 & 3m \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$

☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)

- Si $m=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2+2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)
- Si $m=2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)

b.3 Si $m=\pm 2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.