Examen de Matemáticas II (Ordinaria-Coincidente 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco**, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1 (2 puntos) La NFL es la principal liga profesional de fútbol americano de los Estados Unidos. En un partido de la NFL se pueden anotar puntos de diversas formas, siendo las más comunes las siguientes: *touchdown*, *field goal* y *extra point* al que solo se puede optar después de anotar un *touchdown*. Según la normativa de la liga, un *touchdown* vale 6 puntos, un *field goal* 3 puntos y un *extra point* 1 punto.
De uno de los dos equipos de un partido finalizado de la NFL se sabe que solo ha conseguido puntos mediante *touchdown*, *field goal* y *extra point*. Además se sabe que:

- Ha anotado 63 puntos.
- El doble de *field goal* anotados coincidió con el número de *touchdown* conseguidos.
- La suma del número de *touchdown* y *field goal* anotados fue cuatro veces el número de *extra point* conseguidos.

Halle el número de *touchdown*, *field goal* y *extra point* anotados por el equipo.
Solución:
Sean x el número de *touchdown*, y el número de *field goal* y z el número de *extra point*.

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+3y+z=63\\ 2y=x\\ x+y=4z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-4z=0\\ x-2y=0\\ 6x+3y+z=63 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8\,\text{anotaciones}\\ y=4\,\text{anotaciones}\\ z=3\,\text{anotaciones} \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 6 & 3 & 1 & 63 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-6F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0\\ 0 & -3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 25 & 63 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0\\ 0 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 21 & 63 \end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 21z=63\Longrightarrow z=3\\ -3y+12=0\Longrightarrow y=4\\ x+4-12=0\Longrightarrow x=8 \end{array}\right.$$

Pregunta 2 (2 puntos) Dada la función real de variable real $f(x)=|x^2-6x+5|$, se pide:

a) (1 punto) Hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de $f(x)$, así como sus correspondientes valores.

b) (1 punto) Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=3$ y $x=6$.

Solución:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 5$:

$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$+$	$-$	$+$

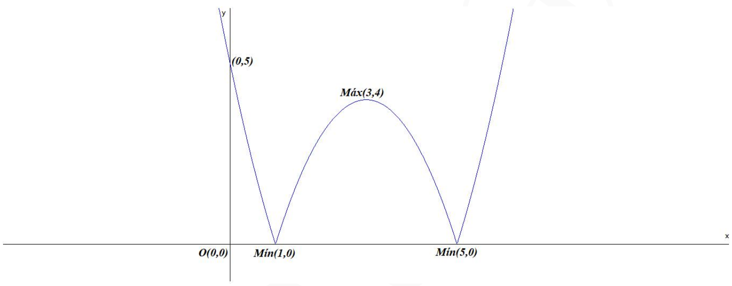
$$\Longrightarrow f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2 - 6x + 5 & \text{si} & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si} & 1 < x \le 5 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si} & x > 5 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ no válida} & \text{si} & x < 1 \\ -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3 & \text{si} & 1 < x < 5 \\ 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ no válida} & \text{si} & x > 5 \end{array} \right.$$

En la rama $1 < x < 5 \Longrightarrow f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(3) = -2 < 0 \Longrightarrow x = 3$ es un máximo relativo que corresponde al punto $(3, 4)$.

La función valor absoluto es siempre positiva, por lo que tendrá mínimos absolutos sobre el eje de abscisas en $(1, 0)$ y $(5, 0)$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

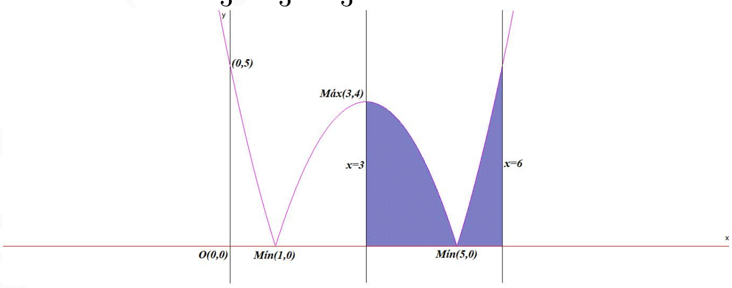


b) Habrá dos recintos de integración $S_1 : [3, 5]$ y $S_2 : [5, 6]$.

$$S_1 = \int_3^5 (-x^2 + 6x - 5)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \Big]_3^5 = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}$$

$$S_2 = \int_5^6 (x^2 - 6x + 5)\, dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \Big]_5^6 = -6 + \frac{25}{3} = \frac{7}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}\ u^2$$



Pregunta 3 (2 puntos) Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$, $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

a) (1 punto) Determine la posición relativa de r y s.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

b.1. Halle la distancia entre s y t.

b.2. Halle el coseno del ángulo que forman r y s.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(1,2,-6)\\ P_r=A(1,2,-5)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=-5-6\lambda\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l}x-2y+3z=3\\ x-y=0\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=-3+3\mu\\ y=-3+3\mu\\ z=\mu\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,3,1)\\ P_s(-3,-3,0)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,-3,0)-(1,2,-5)=(-4,-5,5)$

Estudiamos la posición relativa de las rectas r y s:

$[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix}-4&-5&5\\1&2&-6\\3&3&1\end{vmatrix}=0$ y Rango$\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}$ =Rango$\begin{pmatrix}1&2&-6\\3&3&1\end{pmatrix}=2\Longrightarrow$

r y s se cortan en un punto.

b) b.1 $t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_s}=(3,3,1)\\ P_t=C(1,0,0)\end{array}\right.$ y $\overrightarrow{P_tP_s}=(-3,-3,0)-(1,0,0)=(-4,-3,0)$

Como $s\parallel t\Longrightarrow d(s,t)=d(P_t,s)=\dfrac{|\overrightarrow{P_tP_s}\times\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|}=\dfrac{\left|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\-4&-3&0\\3&3&1\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{9+9+1}}=\dfrac{|(-3,4,-3)|}{\sqrt{19}}=$
$\dfrac{\sqrt{34}}{\sqrt{19}}=\dfrac{\sqrt{646}}{19}\ u$

b.2 $\cos(\widehat{r,s})=\dfrac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\dfrac{|(1,2,-6)\cdot(3,3,1)|}{|(1,2,-6)|\cdot|(3,3,1)|}=\dfrac{|3+6-6|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{19}}=\dfrac{3}{\sqrt{779}}$

Pregunta 4 (2 puntos) **Responda a una de las dos preguntas siguientes:**

a) (2 puntos) Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio que verifican $P(\overline{A})=0,6$, $P(A\cup B)=0,75$ y $P(B|A)=0,375$. Se pide:

b.1. (1 punto) Calcular $P(B)$.

b.2. (1 punto) Calcular $P(\overline{A}|B)$.

b) (2 puntos) En los barrios de Tokio se considera el reciclaje y la clasificación de la basura una obligación ciudadana. Si no se clasifican los residuos de forma correcta para que sean retirados por la empresa de recogida de basuras, estos no son recogidos y el barrio puede ser penalizado por el ayuntamiento. En el barrio de Ueno, el 82,5 % de los hogares realizan esta tarea de forma adecuada.

b.1. (1 punto) Se analizan los residuos de diez hogares de este barrio. Calcule la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos no clasifique correctamente sus residuos.

b.2. (1 punto) El ayuntamiento selecciona una muestra aleatoria de 200 hogares en este barrio y si el porcentaje de familias que comete errores en la clasificación de sus residuos es superior o igual al 10 %, el barrio es penalizado. Calcule, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados.

Solución:

a) Tenemos: $P(\overline{A}) = 0,6$, $P(A\cup B) = 0,75$ y $P(B|A) = 0,375$.

a.1. $P(A\cap B) = P(B|A)P(A) = 0,375\cdot(1-0,6) = 0,15$
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow 0,75 = 0,4+P(B)-0,15 \Longrightarrow P(B) = 0,5$

a.2. $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,5-0,15}{0,5} = 0,7$

b) Tenemos $B(10; 0,825)$.

b.1. Tenemos $B(10; 1-0,825) = B(10; 0,175)$
$P(X\le 1) = P(X=0)+P(X=1) = \binom{10}{0}0,175^0\cdot 0,825^{10} + \binom{10}{1}0,175^1\cdot 0,825^9 = 0,4559$

b.2. $n = 200 \Longrightarrow B(200; 0,825)$ y tenemos $n\ge 30$, $np = 200\cdot 0,825 = 165 > 5$ y
$nq = 200\cdot 0,175 = 35 > 5 \Longrightarrow B(200; 0,825) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(165; 5,374)$
$200\cdot 0,9 = 180 \Longrightarrow P(X<180) = P\left(Z\le \dfrac{179,5-165}{5,374}\right) = P(Z\le 2,7) = 0,9965$

Pregunta 5 (2 puntos) **Responda a una de las dos preguntas siguientes:**

a) (2 puntos) Sea la función $f(x) = x^2+bx$.

a.1. (1 punto) Determine los valores de b para que la recta $y = x-1$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)$.

a.2. (1 punto) ¿Es cierto que para cualquier valor de b existe una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $y = x-1$? Justifique la respuesta.

b) (2 puntos) Calcule los siguientes límites:

b.1. (1 punto) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

b.2. (1 punto) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$

Solución:

a) $f'(x) = 2x+b$, $m = f'(x_0) = 2x_0+b = 1 \Longrightarrow x_0 = \dfrac{1-b}{2}$
$f(x_0) = x_0-1 \Longrightarrow x_0^2+bx_0 = x_0-1 \Longrightarrow x_0^2+(b-1)x_0+1 = 0$
$\dfrac{(1-b)^2}{4}+(b-1)\dfrac{1-b}{2}+1 = 0 \Longrightarrow b^2-2b-3 = 0 \Longrightarrow b = -1$ y $b = 3$.

b) La pendiente de la recta es $m = 1$ y como se vió anteriormente $f'(x) = 2x+b = 1 \Longrightarrow \forall b$ podemos encontrar un punto $(x_0, f(x_0))$ que cumpla $x_0 = \dfrac{1-b}{2}$ y la tangente en ese punto sería paralela a $y = x-1$, pues tendría pendiente $m = 1$.

c) b.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2}+x} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

b.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}}{\frac{2}{1+2x}} = \dfrac{3}{2}$