

Examen de Matemáticas II (Selectividad - Ordinaria 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco**, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1 (2 puntos) Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .
- (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $|A| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \implies \lambda = 1$ y $\lambda = 3$.

• Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

• Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3 \implies |A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $\lambda = 2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |A| = -1 \implies \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

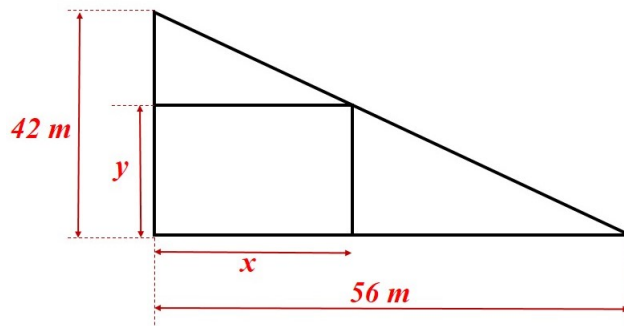
$$A^2 - AX = I \implies -AX = I - A^2 \implies AX = -I + A^2 \implies X = A^{-1}(-I + A^2) = -A^{-1} + A =$$

$$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 (2 puntos) Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Solución:



El área del triángulo grande es igual a la suma del área del rectángulo más el área de los dos triángulos pequeños:

$$\frac{42 \cdot 56}{2} = x \cdot y + \frac{(56 - x) \cdot y}{2} + \frac{(42 - y) \cdot x}{2} \implies 3x + 4y = 168 \implies y = \frac{168 - 3x}{4}$$

La función gasto sería: $G(x, y) = 30xy + 50 \left[\frac{(56 - x)y}{2} + \frac{(42 - y)x}{2} \right] = -20xy + 1050x + 1400y \implies$

$$G(x) = -20x \frac{168 - 3x}{4} + 1050x + 1400 \frac{168 - 3x}{4} = 15(x^2 - 56x + 3920)$$

$$G'(x) = 15(2x - 56) = 0 \implies x = 28$$

$$G''(x) = 30 \implies G(28) = 30 > 0 \implies x = 28 \text{ m es un mínimo con } y = 21 \text{ m.}$$

Pregunta 3 (2 puntos) Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r \equiv \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

- a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
- b.1. Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
- b.2. Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Solución:

a) Seguimos los siguientes pasos:

• Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (2, 2, -1) \\ P_t = P(2, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

• Calculamos el punto P' de corte de t y π :

$$2(2 + 2\lambda) + 2(2\lambda) - (-\lambda) = 13 \implies \lambda = 1 \implies P'(4, 2, -1)$$

• El punto P' es el punto medio entre P y el punto buscado P'' :

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = (8, 4, -2) - (2, 0, 0) \implies P''(6, 4, -2)$$

b) b.1 Tenemos $\vec{u}_\pi = (2, 2, -1)$ y $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 4) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases}$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0 \implies r \parallel \pi \text{ o } r \subset \pi. \text{ Sustituimos } P_r \text{ en } \pi \implies 4 + 0 - 0 \neq 13 \implies P_r \notin \pi \implies r \parallel \pi$$

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|4 + 0 - 0 - 13|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ u.}$$

b.2 El plano buscado es $\pi' : \begin{cases} \vec{u}_\pi = (2, 2, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 1, 4) \\ P_r(2, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 9x - 9y - 18 = 0 \implies$
 $\pi' : x - y - 2 = 0.$

Pregunta 4 (2 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

- a) (2 puntos) El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.
- a.1. (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- a.2. (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?
- b) (2 puntos) Sabiendo que: $P(B) = 0,4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$ y $P(B|A) = 0,2$, calcule las siguientes probabilidades:
- b.1. (1 punto) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.
- b.2. (1 punto) $P(A \cap B|A \cup B)$.

Solución:

- a) Sean $N(24; 3)$, D defectuoso y $q = P(D \leq 21)$.
- a.1. $q = P(D \leq 21) = P\left(Z \leq \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$
- a.2. $n = 10$ y $p = 1 - q = 0,8413 \implies B(10; 0,8413)$:
 $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) =$
 $\binom{10}{9} 0,8413^9 \cdot 0,1587^1 + \binom{10}{10} 0,8413^{10} \cdot 0,1587^0 = 0,5127.$
- b) Tenemos: $P(B) = 0,4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$ y $P(B|A) = 0,2$.
- b.1. $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \implies P(A \cup B) = 1 - 0,4 = 0,6$
 $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,2P(A)$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,6 = P(A) + 0,4 - 0,2P(A) \implies$
 $0,2 = 0,8P(A) \implies P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$
 $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$
 $P(A \cap B) = 0,2P(A) = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05.$
- b.2. $P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,05}{0,6} = \frac{1}{12} \simeq 0,0833.$

Pregunta 5 (2 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

- a) (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

b) (2 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \sin(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b.1. (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

b.2. (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

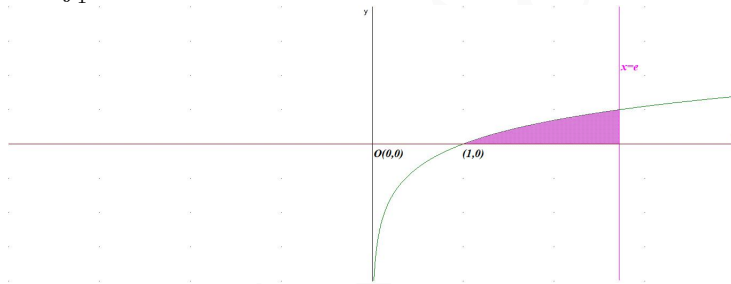
Solución:

a) $\ln x = 0 \implies x = 1$, luego sólo hay un recinto de integración $S : [1, e]$ donde la función es positiva.

$$F(x) = \int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx =$$

$$x \ln x - x = x(\ln x - 1) + C$$

$$S = \int_1^e \ln x \, dx = F(e) - F(1) = 0 - (-1) = 1 \text{ u}^2$$



b) b.1. Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - \sin(ax) + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{1+x^2} = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \implies b = 2$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - a \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} f'(0^-) = -a \\ f'(0^+) = 2 \end{cases} \xrightarrow{f'(0^-) = f'(0^+)} a = -2$$

b.2. $x_0 = 2 \implies y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{2e^2}{5}$

$$m = f'(x_0) = f'(2) = \frac{2e^2}{25} \xrightarrow{y - y_0 = m(x - x_0)} y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x - 2) \implies$$

$$y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{2e^2}{5} \implies y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}$$