Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.

b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?

c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.

Solución:

a) Sea $C(t)$ la primitiva de $c(t)$, es decir, $C'(t) = c(t)$:
$C(t) = \int \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) = \frac{t^2(3-t)}{4} + K$
Tenemos $C(0) = 0 \Longrightarrow 0 + K = 0 \Longrightarrow K = 0 \Longrightarrow C(t) = \frac{t^2(3-t)}{4}$
Como 60 minutos son una hora tenemos $C(1) = \frac{1}{2} = 0,5$ mg.

b) Estudiamos la monotonía: $C'(t) = c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 2$.

	$(0,2)$	$(2,3)$
$c(t)$	$+$	$-$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$ horas y decreciente en el $(2,3)$ con un máximo relativo (en este caso absoluto) en el punto $(2,1)$.
Luego el principio activo aumenta durante las dos primeras horas, en ese momento alcanza el máximo valor y a partir de entonces decrece el principio activo de forma continua.
Por tanto, no crece de 0 a 3 horas sino de 0 a 2.

c) Como se ha explicado en el apartado anterior, el máximo de principio activo se produce a las 2 horas, momento en el que hay que dar a la niña el sobre de sabor a fresa y el principio activo en una cantidad de 1 mg.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2.
2. (1,25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4.

b) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = -1 \\ ax + (-a+2)y = 2 \\ 2x - (a+3)y + (a+2)z = -5 \end{array} \right.$$

1. (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a) 1. $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I \Longrightarrow D^t + A^{-1} = B^{-1}(2I)B = 2I \Longrightarrow D^t = 2I - A^{-1} \Longrightarrow$

$$D = (2I - A^{-1})^t = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \right]^t = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]^t =$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A+2I)(A+2I) = A^2 + 2A + 2A + 4I = (A+2I) + 4A + 4I = 5A + 6I =$

$$5\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) 1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -a+2 & 0 & 2 \\ 2 & -(a+3) & a+2 & -5 \end{array} \right); \quad |A| = a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0,1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

2. Si $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y + z = -1 \\ x + y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{array} \right.$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 3 Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

a) En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

1. (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.
2. (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

b) En el segundo municipio:

1. (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.
2. (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación no supere el 3 % (±3 %).

Solución:

a) En el primer municipio: $n = 600$ y $p = 0,7 \Longrightarrow B(600; 0,7)$

1. $E[X] = np = 600 \cdot 0,7 = 420$ personas estarán comprometidas con las prácticas de reciclaje. Luego las no comprometidas con estas prácticas serán $600-420 = 180$ personas.
2. Tenemos $n = 600 \geq 30$, $np = 420 > 5$ y $nq = 180 > 5$ luego:

$$B(600; 0,7) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(420; 11,225)$$

$P(408 \leq X \leq 432) = P\left(\dfrac{407,5-420}{11,225} \leq Z \leq \dfrac{432,5-420}{11,225}\right) = P(-1,11 \leq Z \leq 1,11) =$
$P(Z \leq 1,11) - P(Z \leq -1,11) = 2P(Z \leq 1,11) - 1 = 2 \cdot 0,8665 - 1 = 0,733$

b) En el segundo municipio:

1. $n = 450$, $\hat{p} = \dfrac{351}{450} = 0,78$ y $NC = 0,90$:
$0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\dfrac{0,78 \cdot 0,22}{450}} = 0,0321$
$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,78-0,0321; 0,78+0,0321) = (0,7479; 0,8121) = (74,79\,\%; 81,21\,\%)$
2. $\hat{p} = 0,8$, $E = 3\,\% = 0,03$ y $NC = 95\,\%$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,03 = 1,96\sqrt{\dfrac{0,8 \cdot 0,2}{n}} \Longrightarrow n \geq 682,9511 \Longrightarrow n = 683$ personas.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) De dos sucesos A y B sabemos que: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A}) = 0,55$, donde $\overline{A}$ es el suceso complementario de A.

1. (1 punto) Calcule $P(A|B)$
2. (1 punto) Calcule $P(\overline{B}|A)$ siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B.
3. (0,5 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cap B)$.

b) En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

1. (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

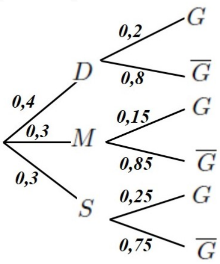
2. (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

Solución:

a) Tenemos: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A}) = 0,55$.

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 1 = (1 - 0,55) + 0,8 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,25$
   $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,25}{0,8} = 0,3125$
2. $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,45 - 0,25}{0,45} = 0,4444$
3. $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,25 = 0,55.$

b) Sean D los dúos nominados, M los grupos musicales, S los solistas, G ganan el premio y $\overline{G}$ no ganan el premio.



1. $P(G) = P(G|D)P(D) + P(G|M)P(M) + P(G|S)P(S) = 0,2 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,2$
2. $P(S|G) = \dfrac{P(G|S)P(S)}{P(G)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,3}{0,2} = 0,375$

www.musat.net