Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-Coincidente 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.
El famoso youtuber Pepe Fogones ha decidido emprender una nueva aventura empresarial y se ha unido con su amigo Cocinauta para lanzar al mercado una exclusiva variedad de té *matcha* ecológico. Ambos han invertido parte de sus ahorros en una plantación de té y están analizando los costes de recolección, procesamiento y envasado del té para su distribución. El grupo de asesores contratado por Pepe Fogones y Cocinauta ha logrado modelar los costes marginales mensuales, en euros, mediante la siguiente función:

$$c(x) = \frac{x+10}{50}, \quad 0 < x < 100$$

siendo x la cantidad mensual, en kilos, de té *matcha* envasado. Los asesores contratados por Pepe Fogones y su socio han hecho, además, un estudio de los beneficios que obtiene con sus redes sociales, representados en euros mediante la siguiente función de beneficios:

$$B(t) = \frac{800000}{(t-1)^2+2}, \quad t \geq 0$$

siendo t el tiempo transcurrido a partir del momento en que han hecho el estudio.

a) (1 punto) Calcule el coste de envasar x kilos de té *matcha* sabiendo que el coste de envasar el primer kilo es de 121,21 euros. Tenga en cuenta que la función de costes marginales es la derivada de la función de costes.

b) (1,5 puntos) Analice si, con el transcurso del tiempo, el beneficio que obtiene Pepe Fogones con sus redes sociales crece o no, cuál es el máximo beneficio y en qué momento se alcanza. Estudie qué pasaría con el beneficio a largo plazo.

Solución:

a) $C(x) = \int c(x)\,dx = \int \frac{x+10}{50}\,dx = \frac{x^2+20x}{100} + \alpha$

$C(1) = 121,21 \Longrightarrow \frac{1+20}{100} + \alpha = 121,21 \Longrightarrow \alpha = 121$

$$C(x) = \frac{x^2+20x}{100} + 121, \quad 0 < x < 100$$

b) Tenemos:

- ☛ $B(0) = \frac{800000}{3} \simeq 266666,67$

- ☛ $\lim_{t\to\infty} \dfrac{800000}{(t-1)^2+2} = 0$ los beneficios tienden a cero con el paso del tiempo.

- ☛ $B'(t) = -\dfrac{1600000(t-1)}{[(t-1)^2+2]^2} = 0 \Longrightarrow t = 1$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$B'(t)$	$+$	$-$
$B(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

  Los beneficios crecen en el intervalo $(0,1)$ años y decrecen en el $(1,\infty)$.

- ☛ Hay un máximo relativo en el punto $t = 1$ año con un beneficio de $B(1) = \dfrac{800000}{2} =$ 400000 euros. Será un máximo absoluto.

Problema 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

a) Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a.I. (1,25 puntos) Calcule las matrices A^{20} y A^{21}.

a.II. (1,25 puntos) Calcule la matriz X que verifique la igualdad $XA = BB^tA^{-1}$, donde B^t indica la matriz traspuesta de B.

b) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ ay + z = -2a \\ -ax + az = -2 \end{cases}$$

b.I. (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b.II. (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a) a.I. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$,

$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A, \ldots\ldots, A^n = \begin{cases} A^n = A & \text{si } n \text{ impar} \\ A^n = I & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

Luego $A^{20} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{21} = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a.II. $XA = BB^tA^{-1} \Longrightarrow XAA = BB^tA^{-1}A = BB^t \Longrightarrow XI = BB^t \Longrightarrow X = BB^t =$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) b.I. $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a & 1 & -2a \\ -a & 0 & a & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a^3 - a = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ y } a = \pm 1$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)
- ☛ Si $a = 1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$
Sistema Incompatible. (No tiene solución)
- ☛ Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$
Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b.II. Si $a = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

Una organización no gubernamental (ONG) quiere saber qué cantidad de dinero dedican las familias a actividades de interés social y en qué tipo de actividades están interesadas. Para ello se selecciona un municipio al azar.

a) La cantidad anual donada por familia a actividades de interés social se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica de 40 euros.

  a.1. (1,25 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 familias resultó que la donación media fue de 360 euros. Obtenga un intervalo de confianza del 90 % para estimar la cantidad media donada por familia a actividades de interés social.

  a.2. (1,25 puntos) Determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de familias del municipio para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación de la cantidad media donada por familia no supere los 10 euros.

b) Se sabe que el 70 % de las familias del municipio destina una parte de su presupuesto a actividades de interés social. Si se seleccionan 200 familias al azar:

  b.1. (1 punto) Indique la distribución de la variable aleatoria $X =$ "número de familias que no destinan ninguna cantidad a actividades de interés social". Determine el número esperado de familias con esta propiedad.

b.2. (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una distribución normal, calcule la probabilidad de que el número de familias de la muestra que destinan una parte de su presupuesto a actividades de interés social esté comprendido entre 138 y 145 familias, ambas incluidas.

Solución:

a) $N(\mu; 40)$

a.1. $n = 64$, $\overline{X} = 360$ y $NC = 90\,\%$:
$0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\dfrac{40}{\sqrt{64}} = 8,225$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (360 - 8,225; 360 + 8,225) = (351,775; 368,225)$

a.2. $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 10 = 1,96\dfrac{40}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 61,4656 \Longrightarrow n = 62$

b) b.1. X sigue una distribución $B(200; 0,3)$ y $E(X) = np = 200 \cdot 0,3 = 60$ familias.

b.2. Ahora tenemos Y sigue una distribución $B(200; 0,7)$ como $n \ge 30$, $np = 200 \cdot 0,7 = 140 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,3 = 60 > 5 \Longrightarrow B(200; 0,7) \overset{N\left(np,\sqrt{npq}\right)}{\approx} N(140; 6,481)$
$P(138 \le Y \le 145) = P\left(\dfrac{137,5 - 140}{6,481} \le Z \le \dfrac{145,5 - 140}{6,481}\right) =$
$P(-0,39 \le Z \le 0,85) = P(Z \le 0,85) - P(Z \le -0,39) =$
$P(Z \le 0,85) - (1 - P(Z \le 0,39)) = 0,8023 - (1 - 0,6517) = 0,454$

Problema 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

a) Sean A y B dos sucesos resultado de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,8$
siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

a.1. (1 punto) Calcule $P(B|\overline{A})$,siendo $\overline{A}$ el suceso complementario de A.

a.2. (0,75 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

a.3. (0,75 puntos) Justifique si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Un ayuntamiento ha sacado a concurso una convocatoria para la construcción de un Centro de Salud de Atención Primaria. Al concurso se han presentado tres constructoras, Horizon, Vértice XXI y CuadraNova, que tienen una probabilidad de conseguir el contrato de 0,5; 0,3 y 0,2 respectivamente. La probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista es de 0,6 si la obra se le encarga a Horizon, 0,2 si se le adjudica a Vértice XXI y 0,9 si la realiza CuadraNova.

b.1. (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el Centro de Salud esté terminado en la fecha prevista.

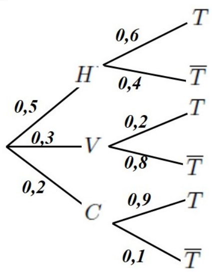
b.2. (1,25 puntos) Transcurrido el plazo previsto para la ejecución de la obra se constató que el Centro de Salud de Atención Primaria no estaba terminado. Obtenga la probabilidad de que la obra hubiera sido adjudicada a Vértice XXI.

Solución:

a) Tenemos: $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,4 \Longrightarrow P(B) = 0,6$, $P(A \cup B) = 0,8$
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow 0,8 = 0,5+0,6-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,3.$

1. $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,6 - 0,3}{1 - 0,5} = 0,6$
2. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = 0,2$
3. $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3 = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

b) Sean H la constructora Horizon, V la constructora Vértice XXI, C la constructora CuadraNova, T se termina en fecha prevista y $\overline{T}$ no se termina en fecha prevista.



1. $P(T) = P(T|H)P(H) + P(T|V)P(V) + P(T|C)P(C) =$
$0,6 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 = 0,54$
2. $P(V|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|V)P(V)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,8 \cdot 0,3}{1 - 0,54} = 0,5217$