Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica *"Pear"* acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettiwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo". Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber @solo_reviews ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso. Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de @solo_reviews, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.

Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa *"Pear"* lanza el siguiente comunicado en *Rettiwt*:

En "Pear" aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. *El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata. #PearSupport #P25*

a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de *"Pear"* es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews hubiese sido superior o igual a 11.

b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99 % de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de @solo_reviews. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de *"Pear"*?

Solución:

a) Tenemos que el comunicado de *"Pear"* es cierto: $p = 0,02 \Longrightarrow B(288; 0,02)$. $n > 288$, $np = 5,76 > 5$ y $nq = 282,24 > 5 \Longrightarrow B(288; 0,02) \overset{N\left(np;\sqrt{npq}\right)}{\longrightarrow} N(5,76; 2,376)$
$P(X \geq 11) = P\left(Z \geq \dfrac{10,5 - 5,76}{2,376}\right) = P(Z \geq 1,99) = 1 - P(Z \leq 1,99) = 1 - 0,9767 = 0,0233$

b) Tenemos: $n = 288$, $p = \dfrac{20}{288} = 0,0694$, $q = 1 - p = 0,9306$ y $NC = 0,99$:
$0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$

$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,575\sqrt{\dfrac{0,0694 \cdot 0,9306}{288}} = 0,0386$
$IC = (\hat{p}-E; \hat{p}+E) = (0,0694-0,0386; 0,0694+0,0386) = (0,0309; 0,1080) = (3,09\,\%; 10,8\,\%)$
El 2 % no se encuentra en el intervalo de confianza y, por tanto, es muy cuestionable la afirmación de *"Pear"*.

Problema 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

a) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

i. (1,25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
ii. (1,25 puntos) Resuelva el sistema para $a = 2$.

b) Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, \quad y \geq 0, \quad -x + y \leq 8, \quad x + 4y \leq 12, \quad x + y \leq 6$$

i. (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.
ii. (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución:

a) i. $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2 - a = 0 \Longrightarrow a = 2$

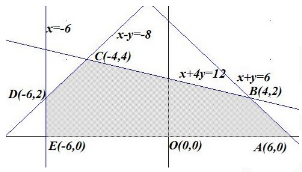
- Si $a \in \mathbb{R} - \{2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $a = 2$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) =$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

ii. Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) I. Región factible

$$S:\begin{cases} -x+y\le 8\\ x+4y\le 12\\ x+y\le 6\\ x\ge -6\\ y\ge 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y\ge -8\\ x+4y\le 12\\ x+y\le 6\\ x\ge -6\\ y\ge 0\end{cases}$$



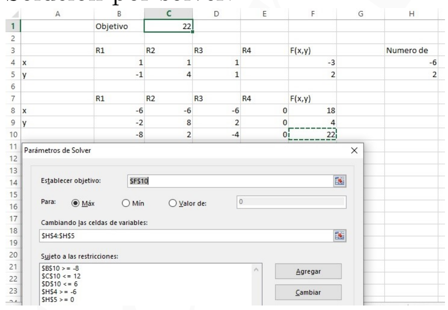
Con vértices: $A(6,0)$, $B(4,2)$, $C(-4,4)$, $D(-6,2)$ y $E(-6,0)$

II. Función objetivo: $f(x,y)=-3x+2y$

$$\begin{cases} f(6,0)=-18\\ f(4,2)=-8\\ f(-4,4)=20\\ f(-6,2)=22 \Longleftarrow \text{máximo}\\ f(-6,0)=18\end{cases} \Longrightarrow$$

El valor máximo que toma la función es en el punto $D(-6,2)$ con $f(-6,2)=22$.

Solución por solver:



Problema 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

a) Considere la función real de variable real $f(x)=x(x^2+a)$ donde $a>0$ es un parámetro real.

1. (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de $f(x)$, $F(x)$, cumpla que $F(0)=0$ y $F(1)=1$.
2. (0,5 puntos) Para $a=\dfrac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por $f(x)$, el eje horizontal y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$.
3. (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=1$ sea 1.

b) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si} \quad x<0\\ \dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$

1. (0,5 puntos) Determine el dominio de $f(x)$.
2. (0,5 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $x=0$.
3. (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) 1. $f(x)=x(x^2+a)$

$$F(x)=\int (x^3+ax)\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{ax^2}{2}+C$$

$F(0) = 0 + 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0$
$F(1) = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + C \stackrel{C=0}{=} \frac{1}{4} + \frac{a}{2} = 1 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$
$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}$

2. Si $a = \frac{3}{2} \Longrightarrow f(x) = x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right)$ y analizamos si esta función corta al eje de abscisas en el intervalo $(0, 2)$:

$$x\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0,2) \\ x^2 + \frac{3}{2} = 0 \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Luego la función no corta al eje de abscisas en el intervalo $(0, 2)$ y sólo hay un recinto de integración $S : [0, 2]$
$S = \int_0^2 f(x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4}\right]_0^2 = 7\ u^2$
El resultado de la integral es positivo por estar la función por encima del eje de abscisas.

3. $f(x) = x^3 + ax \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + a$
$m = f'(1) = 3 + a = 1 \Longrightarrow a = -2$

b) 1. ☛ Rama $x < 0$: El único valor que anula el denominador es $x = \frac{1}{2}$ que no está en la rama, luego el dominio de la función en esta rama es $(-\infty, 0)$
☛ Rama $x \geq 0$: Los valores que anulan el denominador son $x = \pm 3$, pero el valor negativo no está en la rama, luego el dominio de la función en esta rama es $[0, 3) \cup (3, \infty)$
☛ Conclusión: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty) = \mathbb{R} - \{3\}$

2. Continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3+x^2}{x^2-9} = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \xRightarrow{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$$

f es continua en $x = 0$.

3. Asíntotas:
☛ Verticales:
- En la rama $x < 0$ en dominio es toda la rama y, por tanto, no hay asíntotas verticales.
- En la rama $x \geq 0$ hay una asíntota en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{4x^3+x^2}{x^2-9} = \left[\frac{117}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{4x^3+x^2}{x^2-9} = \left[\frac{117}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales:
- En la rama $x < 0$ tenemos $y = \frac{1}{2}$ ya que $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$
- En la rama $x \geq 0$ no hay ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+x^2}{x^2-9} = \infty$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

- En la rama $x < 0$ no hay por haber horizontales.
- En la rama $x \geq 0$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+x^2}{x^3-9x} = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^3+x^2}{x^2-9} - 4x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+36x}{x^2-9} = 1$$

$$y = 4x + 1$$

Problema 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

a) Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información: $P(A) = 0,4$, $P(\overline{B}) = 0,7$, $P(C) = 0,5$ y $P(A \cap B|C) = 0,2$ donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

1. (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.
2. (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.
3. (1 punto) Obtenga $P(C|A \cap B)$.

b) En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5 %.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90 % de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10 % de las veces.

1. (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.
2. (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Solución:

a) Tenemos: $P(A) = 0,4$, $P(\overline{B}) = 0,7 \Longrightarrow P(B) = 0,3$, $P(C) = 0,5$, $P(A \cap B|C) = 0,2$ y por la independencia entre A y B tenemos $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

1. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,12 = 0,88$
2. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,12 = 0,28$
3. $P(C|A \cap B) = \dfrac{P(A \cap B|C)P(C)}{P(A \cap B)} = \dfrac{0,2 \cdot 0,5}{0,12} = 0,8333.$

b) Sean I el gato tiene insuficiencia renal, $\overline{I}$ el gato no tiene insuficiencia renal, P la prueba da positivo y $\overline{P}$ la prueba da negativo.

1. $P(\overline{P}) = P(\overline{P}|I)P(I) + P(\overline{P}|\overline{I})P(\overline{I}) =$
   $0,1 \cdot 0,05 + 0,9 \cdot 0,95 = 0,86$
2. $P(I|P) = \dfrac{P(P|I)P(I)}{P(P)} = \dfrac{0,9 \cdot 0,05}{1 - 0,86} = 0,3214$