Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II Galicia (Modelo 2025)

Tiempo: 90 minutos

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Problema 1 Probabilidad y estadística (2,5 puntos)
CONTEXTO
Los responsables municipales de la población en la que reside llevaron a cabo el año pasado un plan de renovación de los contenedores de basura, instalando nuevos contenedores de recogida selectiva. Su capacidad variará entre los 1.800 litros para los envases de materia orgánica y los 2.900 litros para los envases destinados a la recogida de envases ligeros, papel y cartón, vidrio y fracción restante. Los contenedores, además de contar con sensores inteligentes que medirán su volumen para optimizar el tráfico de camiones, se integrarán en el mobiliario urbano para reducir el impacto estético. Cuando se puso en marcha el citado plan, se tuvo en cuenta que en ocasiones son necesarias reparaciones o sustituciones por diferentes motivos: desgaste por el uso, rotura por fenómenos meteorológicos adversos, actos vandálicos, etc.
Se ha establecido que en un mes determinado la probabilidad de reparar o reemplazar al menos dos contenedores de papel y cartón es 0,1; además, que la probabilidad de reparar o sustituir al menos dos envases de envases ligeros, siendo reparados o sustituidos al menos dos envases de papel y cartón, es de 0,4. Se conoce que la probabilidad de que en un mes determinado sea necesario reparar como máximo un contenedor de papel y cartón y como máximo uno de envases ligero es de 0,72.
Responda estos tres apartados: a), b) y c).

a) Calcule la probabilidad de que en un mes determinado sea necesario reparar o sustituir más de un contenedor de los dos tipos considerados en el párrafo anterior. (1 punto)

b) Si es necesario reparar o reemplazar menos de dos contenedores de papel y cartón en un mes determinado, ¿cuál es la probabilidad de que sea necesario reparar o reemplazar dos o más contenedores de envases ligeros? (1 punto)

c) Sin realizar operaciones adicionales, indique si los sucesos "reparar o sustituir al menos dos contenedores de papel y cartón" y "reparar o sustituir al menos dos contenedores de envases ligeros" son o no independientes. ¿Le parece razonable? Justifique la respuesta. (0,5 puntos)

Solución:

Sean A "reparar o reemplazar al menos dos contenedores de papel y cartón" y B "reparar o sustituir al menos dos envases de envases ligeros".
$P(A) = 0,1$, $P(B|A) = 0,4$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,72$

a) $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04$

b) Tenemos: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,72 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,28$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,28 = 0,1 + P(B) - 0,04 \Longrightarrow P(B) = 0,22$
$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,22 - 0,04}{0,9} = 0,2$$

c) A la vista de los resultados $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.
Sin hacer cálculos A y B son independientes si $P(B|A) = P(B)$ lo cual no se cumple.

Problema 2 ÁLGEBRA. (2,5 puntos)
Responda uno estos dos apartados: a) y b).

a) Para dos matrices A y B se verifica que

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y } 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calcule las matrices A y B. (1,25 puntos)
2. Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor. (1,25 puntos)

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones dado por:
$$x + 2y \leq 40 \quad x + y \geq 5 \quad 3x + y \leq 45 \quad x \geq 0$$
y calcule sus vértices. (1,75 puntos)
2. Calcule el punto o puntos de la región definida en el subapartado anterior donde la función $f(x,y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo. (0,75 puntos)

Solución:

a) 1.

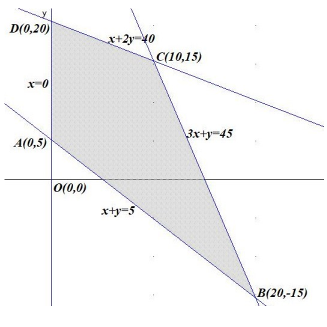
$$\begin{cases} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2. $A \cdot X - B = X \Longrightarrow AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B =$
$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Región factible:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ x + y \geq 5 \\ 3x + y \leq 45 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



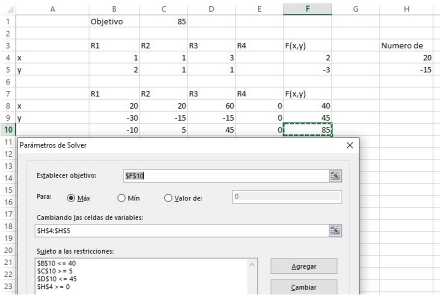
Los vértices son: $A(0,5)$, $B(20,-15)$, $C(10,15)$ y $D(0,20)$.

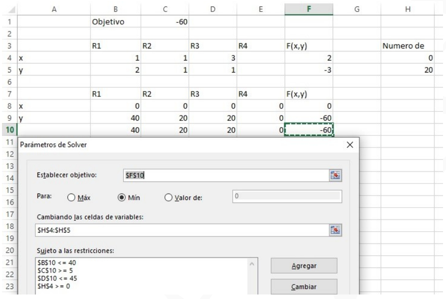
2. La función objetivo es:

$$f(x,y) = 2x - 3y \Longrightarrow \begin{cases} f(0,5) = -15 \\ f(20,-15) = 85 \text{ Máximo} \\ f(10,15) = -25 \\ f(0,20) = -60 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El máximo es 85 y se consigue en el punto $B(20, -15)$ y el mínimo es de -60 y se consigue en el punto $C(0, 20)$.

Solución por solver :





Problema 3 ANÁLISIS. (2,5 puntos)
Responda uno estos dos apartados: a) y b).

a) El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{si} \quad 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & \text{si} \quad 3 < t \le 5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses. Responda los tres subapartados siguientes:

1. Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. (1 punto)
2. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden. (0,75 puntos)
3. Represente la gráfica de la función $N(t)$. (0,75 puntos)

b) Considérese la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales:

1. Calcule a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2, 8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0, 16)$. (1,25 puntos)
2. Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$. (1,25 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $[0, 5]$, las ramas son polinomios y en $t = 3$ se cumple:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 3^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 3}(8 - t(t-2)) = 5 \\ \lim\limits_{t\to 3^+} N(t) = \lim\limits_{t\to 3}(2t - 1) = 5 \\ N(3) = 5 \end{cases} \xRightarrow{\lim\limits_{t\to 3^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 3^+} N(t) = N(3)}$$

$N(t)$ es continua en $t = 3 \Longrightarrow N(t)$ continua en $[0, 5]$.

1. Analizamos su monotonía:

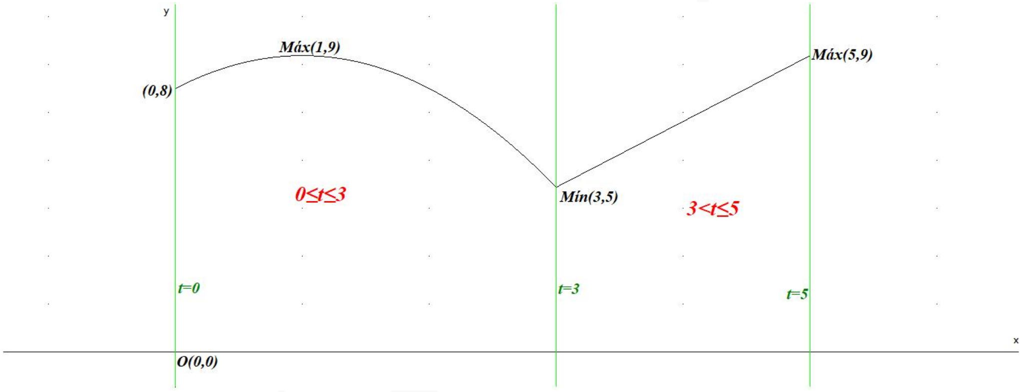
$$N'(t) = \begin{cases} 2 - 2t = 0 \Longrightarrow t = 1 & \text{si} \quad 0 < t < 3 \\ 2 > 0 & \text{si} \quad 3 < t < 5 \end{cases}$$

	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,5)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El número de ejemplares vendidos es creciente en el intervalo $(0,1)\cup(3,5)$ meses y decreciente en el $(1,3)$ meses. Con un máximo relativo el mes 1 con 9000 ejemplares vendidos y un mínimo relativo el mes 3 con 5000 ejemplares vendidos.

2. Además tenemos $N(0) = 8 \Longrightarrow$ 8000 ejemplares y $N(5) = 9 \Longrightarrow$ 9000 ejemplares, cantidad que coincide con el máximo, luego los extremos absolutos serían: el máximo se produce el mes 1 y el mes 5 con 9000 ejemplares vendidos y el mínimo en el mes 3 con 5000 ejemplares.

3. Representación gráfica:



b) 1. $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 - 4x + b \Longrightarrow f''(x) = 6ax - 4$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = 8 \Longrightarrow 8a - 8 + 2b + c = 8 \\ f(0) = 16 \Longrightarrow c = 16 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 16 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -2x^2 + 16$$

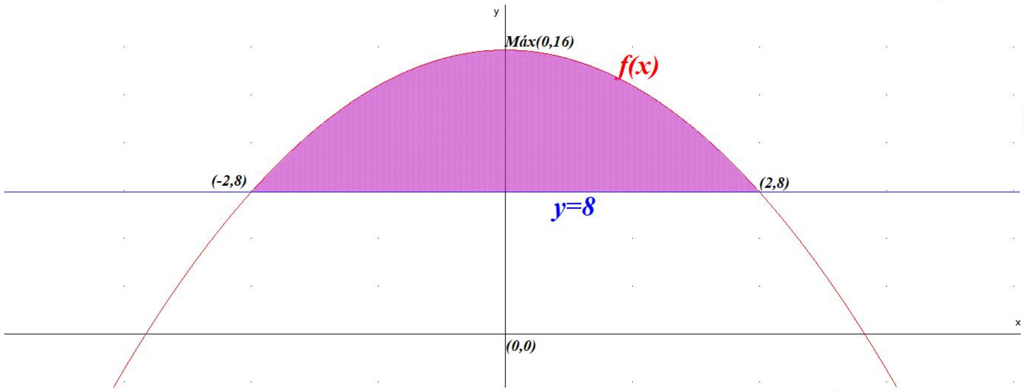
Comprobamos si hay un extremo en $x = 0$ sustituyendo en la segunda derivada: $f''(0) = -4 < 0$ luego se trata de un extremo, en particular, un máximo relativo.

2. Calculamos los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta $y = 8$: $-2x^2 + 16 = 8 \Longrightarrow x = \pm 2$ luego el intervalo de integración será $S_1 : [-2, 2]$

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\, dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x \Big]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$

$$S = \left|\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3} \simeq 21{,}3333\ u^2$$

La integral sale positiva al estar la función $f(x)$ por encima de la recta $y = 8$.



Problema 4 ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)
Responda uno estos dos apartados: a) y b).

a) Se estima que en una población el 20 % padece obesidad y que el 11 % padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27,5 % de los hipertensos padecen obesidad.

1. ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso? (2 puntos)
2. ¿Son independientes los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertensos”? (0,5 puntos)

b) Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

1. Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95 % de confianza para la media del tiempo de formación precisado. (1,25 puntos)
2. Si la media del tiempo de formación precisado es $\mu = 97$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas? (1,25 puntos)

Solución:

a) Sea O “padece obesidad” y H “es hipertenso”.
$P(O) = 0,2$, $P(O \cap H) = 0,11$ y $P(O|H) = 0,275$

1. $P(O|H) = \dfrac{P(O \cap H)}{P(H)} \Longrightarrow P(H) = \dfrac{P(O \cap H)}{P(O|H)} = \dfrac{0,11}{0,275} = 0,4$
   $P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H) = 0,2 + 0,4 - 0,11 = 0,49 \Longrightarrow 49\,\%$
2. $P(O) \cdot P(H) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$
   $P(O \cap H) = 0,11 \neq P(O) \cdot P(H) \Longrightarrow O$ y H no son independientes.

b) $N(\mu; 15)$

1. $n = 25$, $\overline{X} = 97$, y $NC = 0,95$.
   $0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{25}} = 5,88$$

$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (97 - 5,88; 97 + 5,88) = (91,12; 102,88)$

2. Tenemos $\mu = 97$ y $n = 36 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(97; \frac{15}{\sqrt{36}}\right) = N(97; 2,5)$

   $P(90 \le \overline{X} \le 104) = P\left(\frac{90-97}{2,5} \le Z \le \frac{104-97}{2,5}\right) = P(-2,8 \le Z \le 2,8) =$
   $P(Z \le 2,8) - P(Z \le -2,8) = P(Z \le 2,8) - (1 - P(Z \le 2,8)) = 2P(Z \le 2,8) - 1 =$
   $2 \cdot 0,9974 - 1 = 0,9948$