Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Mayo 2025

Problema 1 El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, t en meses, según la función:

$$C(t) = \begin{cases} t^2 - 3Bt + 2A & \text{si} \quad 1 \le t < 4 \\ Bt & \text{si} \quad 4 \le t \le 12 \end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $C(t)$ es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

Solución:

Las ramas son polinomios y, por tanto, son continuas. Hay que imponer la continuidad en $t = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 4^-} C(t) = \lim\limits_{t\to 4}(t^2 - 3Bt + 2A) = 16 - 12B + 2A \\ \lim\limits_{t\to 4^+} C(t) = \lim\limits_{t\to 4}(Bt) = 4B \\ C(4) = 4B \end{array} \right. \xRightarrow{\lim\limits_{t\to 4^-} C(t) = \lim\limits_{t\to 4^+} C(t) = C(4)}$$

$$16 - 12B + 2A = 4B \Longrightarrow 2A - 16B = -16 \Longrightarrow A - 8B = -8$$

Por otra parte $C(3) = 7 \Longrightarrow 9 - 9B + 2A = 7 \Longrightarrow 2A - 9B = -2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} A - 8B = -8 \\ 2A - 9B = -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 8 \\ B = 2 \end{array} \right.$$

Problema 2 La producción de un árbol frutal, $P(x)$ en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \le x \le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) (1,5 puntos) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones.

b) (0,5 puntos) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego.

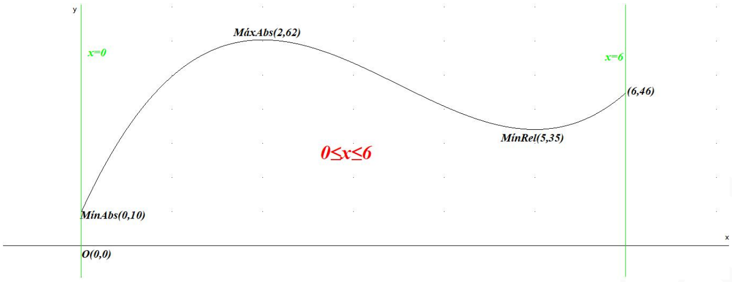
Solución:

a) $P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$

	$(0,2)$	$(2,5)$	$(5,6)$
$P'(x)$	$+$	$-$	$+$
$P(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La producción es creciente en el intervalo $(0,2) \cup (5,6)$ (si se emplean entre 0 y 2 o entre 5 y 6 litros de agua) y es decreciente en el $(2,5)$, cuando se emplean entre 2 y 5 litros de agua. Presenta un máximo relativo cuando se riega con 2 litros de agua y una producción de $P(2) = 62$ kg y un mínimo relativo cuando se riega con 5 litros de agua y su producción es de $P(5) = 35$ kg.
Por otra parte tenemos $P(0) = 10$ y $P(6) = 46$. Luego el mínimo absoluto se produce sin riego con una producción de 10 kg y el máximo absoluto coincide con el relativo de 2 litros de agua con una producción de 62 kg.

b) La evolución seguiría la siguiente gráfica:



Problema 3 Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

☛ Verticales:

- En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x + 2}{2x - 5} = -2$$

luego en $x = 2$ no hay asíntota, se trata de una discontinuidad evitable (un agujero)

- En $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

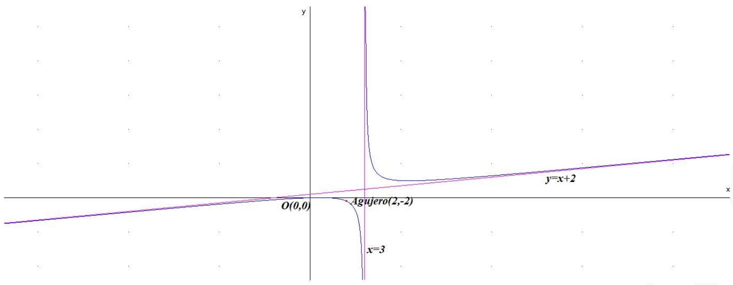
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = -\infty; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

☛ Oblícuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-3} = 2$$

$$y = x + 2$$



Problema 4 Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 1$ y el eje OX entre los valores $x = -2$ y $x = 3$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Solución:

Buscamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas: $-x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 1$. El punto $x = -1$ y el $x = 1$ se encuentran dentro del intervalo $[-2, 3]$ de integración, luego tendremos tres recintos de integración S_1 en $[-2, -1]$, S_2 en $[-1, 1]$ y S_3 en $[1, 3]$.

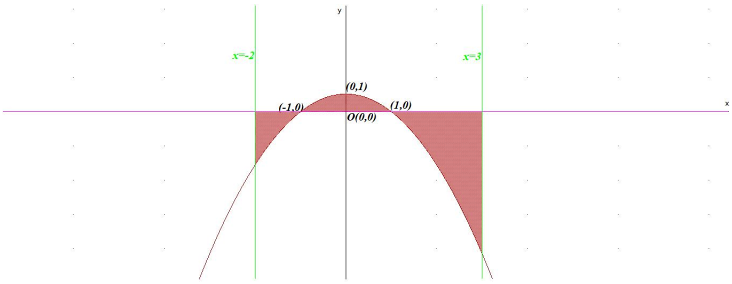
$$S_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 1)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x \bigg]_{-2}^{-1} = -\frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x \bigg]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$S_3 = \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} (-x^2 + 1)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x \bigg]_{1}^{3} = -\frac{20}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| + \left| -\frac{20}{3} \right| = \frac{28}{3} \simeq 9,3333\ u^2$$

Cuando la gráfica de la función está por debajo del eje de abscisas el resultado de la integral debe de ser negativo, por el contrario, cuando la gráfica de la función está por encima del eje de abscisas el resultado tiene que ser positivo. Para resolver este problema hacemos el valor absoluto de cada recinto.



Para dibujar la gráfica: hemos calculado el punto de corte con el eje de ordenadas $(0,1)$, con el de abscisas son $(-1,0)$ y $(1,0)$ y el extremo relativo $f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow (0,1)$ es un máximo relativo.