Problemas de Matemáticas II
Aplicadas a las Ciencias Sociales

Todas las comunidades autónomas

(Modelos de Selectividad 2025)

Prof: **Isaac Musat Hervás**
última actualización:

27 de noviembre de 2024

Las matemáticas pueden ser definidas
como aquel tema
en el cual no sabemos nunca
lo que estamos hablando,
ni si lo que decimos es cierto.
Bertrand Russell

Índice general

Capítulo 1

Andalucía

1.1. Modelo

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Esta prueba consta de 4 ejercicios.

c) En algunos ejercicios se da la posibilidad de elegir entre apartado a) o b). Responda sólo el apartado que elija. **En caso de responder a más apartados de los que deba realizar, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar.**

d) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

e) Todos los resultados deben estar **suficientemente justificados**.

f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos.

g) La valoración de la corrección gramatical, léxica y ortográfica, así como la presentación del texto no será inferior al 10 %.

Problema 1.1.1 Elija sólo uno de los apartados:

a) (2,5 puntos) Después de aplicar un descuento del 10 % a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3,96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20 % del precio del rotulador. Determine el precio original de cada objeto.

b) (2,5 puntos) La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28. Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener el máximo beneficio económico?

Solución:

a) Sean x precio del rotulador, y del cuaderno y z de la carpeta.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,9x+0,9y+0,9z=3,96 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+0,2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=4,4 \\ x-2y=0 \\ x+5y-5z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \text{ €} \\ y=1 \text{ €} \\ z=1,4 \text{ €} \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4,4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4,4 \\ 0 & -3 & -1 & -4,4 \\ 0 & 4 & -6 & -4,4 \end{array}\right)=$$

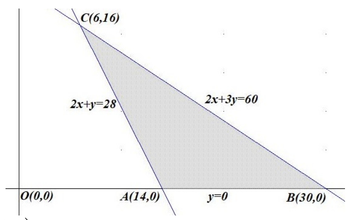
$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3+4F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4,4 \\ 0 & -3 & -1 & -4,4 \\ 0 & 0 & -22 & -30,8 \end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -22z=-30,8 \Longrightarrow z=1,4 \\ -3y-1,4=-4,4 \Longrightarrow y=1 \\ x+1+1,4=4,4 \Longrightarrow x=2 \end{array}\right.$$

b) Sean x el número de pañuelos e y el número de corbatas.

	horas	beneficio
pañuelos	2	4
corbatas	3	6
	≤ 60	

Región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y\leq 60 \\ 2x+y\geq 28 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices a estudiar serán: $A(14,0)$, $B(30,0)$ y $C(6,16)$.

Función objetivo: $f(x,y)=4x+6y$

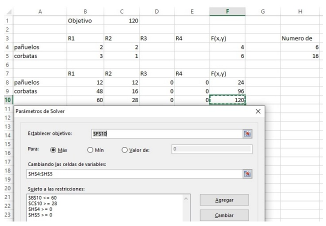
$$\left\{\begin{array}{l} f(14,0)=56 \\ f(30,0)=120 \Longleftarrow \text{máximo} \\ f(6,16)=120 \Longleftarrow \text{máximo} \end{array}\right.$$

El beneficio máximo es de 120€ se produciría en cualquier punto con valores enteros del segmento BC, la primera coordenada corresponde al número de pañuelos y la segunda a las corbatas.

La recta es $y=\dfrac{60-2x}{3}$ cuando $6\leq x\leq 30$ y serían:

pañuelos	corbatas
6	16
9	14
12	12
15	10
18	8
21	6
24	4
27	2
30	0

Solución por solver :



Problema 1.1.2 (2,5 puntos) La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función $c(t)$, con $t \in [0, 24]$, medido en horas. La variación instantánea de esta función es la derivada de c, que viene dada por $c'(t) = 0,03t^2 - 0,9t + 6$, con $t \in (0, 24)$.

a) (1,25 puntos) Estudie los intervalos en los que la función c es creciente.

b) (0,5 puntos) Analice los puntos críticos de la función c, indicando en cuáles se alcanza el máximo y el mínimo relativos.

c) (0,75 puntos) Halle la expresión analítica de la función c, sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial.

Solución:

a) $c'(t) = 0,03t^2 - 0,9t + 6 = 0 \Longrightarrow t = 10$ y $t = 20$.

	$(0,10)$	$(10,20)$	$(20,24)$
$c'(t)$	$+$	$-$	$+$
$c(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 10) \cup (20, 24)$
La función es decreciente en el intervalo $(10, 20)$.

b) La función tiene un máximo relativo en $t = 10$ y un mínimo relativo en $t = 20$.

c) $c(t) = \displaystyle\int (0,03t^2 - 0,9t + 6)\, dt = 0,01t^3 + 0,45t^2 + 6t + C$
$c(0) = 50 \Longrightarrow 0 + C = 50 \Longrightarrow C = 50 \Longrightarrow c(t) = 0,01t^3 + 0,45t^2 + 6t + 50$

Problema 1.1.3 (2,5 puntos) Elija sólo uno de los apartados:

a) Para tratar cierta enfermedad, en un hospital se utilizan tres fármacos distintos, A, B y C, administrándose a cada enfermo un solo fármaco. El 30 % de los pacientes es tratado con el fármaco A, el 50 % es tratado con el B y el resto con el fármaco C. La probabilidad de que la enfermedad se cure con el fármaco A es de 0,6, de que se cure con el fármaco B es de 0,8 y de que se cure con el fármaco C es de 0,7. Se elige al azar un paciente de ese hospital con esa enfermedad.

   I. (1,5 puntos) Calcule la probabilidad de que el paciente se cure.

   II. (1 punto) Sabiendo que el paciente se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tratado con el fármaco A?

b) Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de 0.8 de encestar un tiro libre. Si en un partido lanza 6 tiros libres, halle la probabilidad de que enceste:

   I. (0,75 puntos) Exactamente cuatro tiros libres.

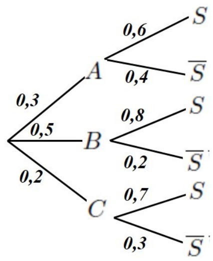
   II. (0,75 puntos) Al menos cuatro tiros.

   III. (0,5 puntos) Ninguno de ellos.

   IV. (0,5 puntos) Alguno de ellos.

Solución:

a) Sean A el fármaco A, B el fármaco B, C el fármaco C, S se cura y $\overline{S}$ no se cura.



I. $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) =$
$0,6 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,72$

II. $P(A|S) = \dfrac{P(S|A)P(A)}{P(S)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,3}{0,72} = 0,25$

b) $B(6; 0,8)$

I. $P(X = 4) = \binom{6}{4} 0,8^4 \cdot 0,2^2 = 0,24576$

II. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$\binom{6}{4} 0,8^4 \cdot 0,2^2 + \binom{6}{5} 0,8^5 \cdot 0,2^1 + \binom{6}{6} 0,8^6 \cdot 0,2^0 = 0,90112$

III. $P(X = 0) = \binom{6}{0} 0,8^0 \cdot 0,2^6 = 0,000064$

IV. $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,000064 = 0,999936$

Problema 1.1.4 (2,5 puntos) Elija sólo uno de los apartados:

a) El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3 días.

I. (1,25 puntos) Determine un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, a un nivel de confianza del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8,1 días.

II. (1,25 puntos) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar la media poblacional con un error inferior a 1 día y un nivel de confianza del 92 %.

b) Una tienda de ropa quiere estudiar la aceptación de un nuevo sistema de pago a través del teléfono móvil. Para ello realiza una encuesta entre 200 de sus clientes elegidos al azar, resultando que 150 de ellos sí estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.

I. (1,5 puntos) Determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de clientes de esa tienda que estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.

II. (1 punto) Mediante una nueva encuesta se quiere estimar la proporción de clientes de esa tienda que usarían el nuevo sistema de pago, con un error máximo del 3 % y un nivel de confianza del 94 %. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿a cuántos clientes como mínimo habría que realizar la encuesta?

Solución:

a) $N(\mu; 3)$

I. $n = 100$, $\overline{X} = 8,1$ y $NC = 97\,\% = 0,97 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\dfrac{3}{\sqrt{100}} = 0,651$

$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (8,1 - 0,651; 8,1 + 0,651) = (7,449; 8,751)$

II. $NC = 92\,\% = 0,92 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,08 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,04$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,75\dfrac{3}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 27,5625 \Longrightarrow n = 28$

b) $n = 200$, $\hat{p} = \dfrac{150}{200} = 0,75$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,25$

I. $NC = 97\,\% = 0,97 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,17\sqrt{\dfrac{0,75 \cdot 0,25}{200}} = 0,0664$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,75-0,0664; 0,75+0,0664) = (0,6836; 0,8164) = (68,36\,\%, 81,64\,\%)$

II. $NC = 94\,\% = 0,94 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,06 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,03$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,03 = 1,88\sqrt{\frac{0,75 \cdot 0,25}{n}} \Longrightarrow n \ge 736,3333 \Longrightarrow n = 737$$

Capítulo 2

Aragón

2.1. Modelo

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre Opción I y Opción II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca físicamente en primer lugar.
Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.
Para facilitar la maquetación, la tabla de la distribución normal estará disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria para ninguna pregunta.

Problema 2.1.1 (2,5 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (1,25 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX+3B=C$ esté bien planteada, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X.

b) (1,25 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

Solución:

a) $\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{m\times n}{X} + 3\underset{2\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{C} \Longrightarrow m=2$ y $n=3 \Longrightarrow \underset{2\times 3}{X}$
Como $|A|=-1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$$AX+3B=C\Longrightarrow AX=C-3B\Longrightarrow X=A^{-1}(C-3B)=$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3&2\\-4&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&2&2\\14&-5&0\end{pmatrix}$$

b) Sean x las participaciones de 10 euros vendidas, y las de 25 euros y z las de 5 euros.

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{2}\\ 10x+25y+5z=7100\\ x+y+z=430\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=430\\ 2x-y=0\\ 2x+5y+z=1420\end{cases}\Longrightarrow \begin{cases} x=110\\ y=220\\ z=100\end{cases}\Longrightarrow$$

una ganancia de $\begin{cases} 110\cdot 2,50=275€\\ 220\cdot 5=1100€\\ 100\cdot 1=100€\end{cases}$ en total $275+1100+100=1475€$

Resolvemos el sistema matricialmente:

$$AX=B\Longrightarrow X=A^{-1}B\Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\2&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}430\\0\\1420\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\2&5&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}430\\0\\1420\end{pmatrix}=$$
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1&4&1\\-2&-1&2\\12&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}430\\0\\1420\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\220\\100\end{pmatrix}$$

Problema 2.1.2 (2,5 puntos) La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t)>0$ viene dado por $V(t)=200-\dfrac{100t}{10+2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a) (0,75 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b) (1 punto) Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a) para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.

c) (0,75 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?

Solución:

a) $V(0)=200$ € en su valor inicial y en un horizonte infinito $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(200-\dfrac{100t}{10+2t}\right)=$ $200-50=150$ €

b) $V'(t)=-\dfrac{250}{(t+5)^2}<0\Longrightarrow V(t)$ es decreciente en todo el dominio de la función.
Por el apartado anterior la función decrecerá infinitamente pero no llegará a los 150 € y mucho menos a 125 €.

c) $V(t)=200-\dfrac{100t}{10+2t}=175\Longrightarrow \dfrac{100t}{10+2t}=25\Longrightarrow t=5$ años

Problema 2.1.3 (2,5 puntos) En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a) (1,25 puntos) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98 % para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.

b) (0,5 puntos) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75 % de los votos. A la vista de los resultados del apartado a), ¿es razonable tal afirmación?

c) (0,75 puntos) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62 % de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

Solución:

$$p = \frac{120}{200} = 0,6 \quad q = 1 - p = 1 - \frac{80}{200} = 0,4 \quad n = 200$$

a) $NC = 98\,\% = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,325$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,325\sqrt{\frac{0,6 \cdot 0,4}{200}} = 0,0805$$

$$IC = (p-E, p+E) = (0,6 - 0,0805; 0,6 + 0,0805) = (0,5195; 0,6805) = (51,95\,\%; 68,05\,\%)$$

b) El 75 % no está dentro del intervalo de confianza, luego la afirmación no es razonable con una confianza del 98 %

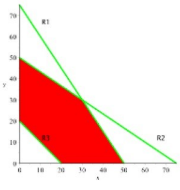
c) Ahora $n = 3$, $p = 0,62$ y $q = 0,38$:

$$B(3; 0,62) \Longrightarrow P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{3}{0} 0,62^0 \cdot 0,38^3 = 0,9451$$

Problema 2.1.4 (2,5 puntos) Elija entre a y b, respondiendo únicamente a una de las dos.

a) I (1,25 puntos)

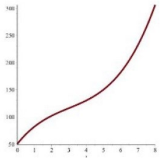
Considerando la región factible señalada en rojo y una función objetivo dada por $\text{máx} f(x, y) = 30x + by$, donde b es un valor desconocido. Razone que (40,40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20,20).
Nota: R1: $3x - 2y \le 150$, R2: $2x + 3y \le 150$, R3: $x + y \ge 20$



II (1,25 puntos) Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Él piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás. Sabemos que la probabilidad de aprobar el examen (contestar correctamente a al menos dos preguntas) es 0,9163. Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

b) I (1,25 puntos) Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.
Plantee un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total.

II (1,25 puntos)
Para la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50, \;\; 0 \leq x \leq 8$, cuya gráfica se muestra a la derecha:



1. (0,5 puntos) ¿$f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

2. (0,75 puntos) Calcule $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$ e interprete el valor obtenido.

Solución:

a) I El punto $(40, 40)$ está fuera de la región factible y no puede ser solución del problema planteado.
El punto $(20, 20)$ sí se encuentra dentro de la región factible y pertenecería al conjunto de soluciones, pero no sería la óptima.

II Tenemos $B(4; 0,7)$

$$P(X = 4 | X \geq 2) = \frac{P(\{X = 4\} \cap \{X \geq 2\})}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{0,2401}{0,9163} = 0,2620$$

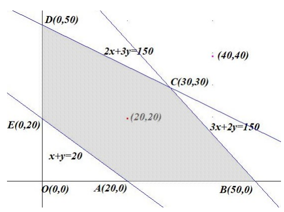
b) I Sea x el nº de productos A e y el nº de productos B.

	horas	unidades	ganancia
A	3	2	30
B	2	3	40
	≤ 150	≤ 150	

☛ $f(x, y) = 30x + 40y$ en el recinto S:

$$\begin{cases} x + y \geq 20 \\ 3x + 2y \leq 150 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

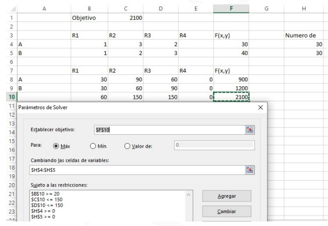
Los vértices a estudiar serán: $A(20, 0)$, $B(50, 0)$, $C(30, 30)$, $D(0, 50)$ y $E(0, 20)$.



☛ $f(x, y) = 30x + 40y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(20,0)=600 \\ f(50,0)=1500 \\ f(30,30)=2100 \\ f(0,50)=2000 \\ f(0,20)=800 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Solución por solver :



La máxima ganancia será de 2100€ y se alcanza con 30 unidades de A y 30 de B.

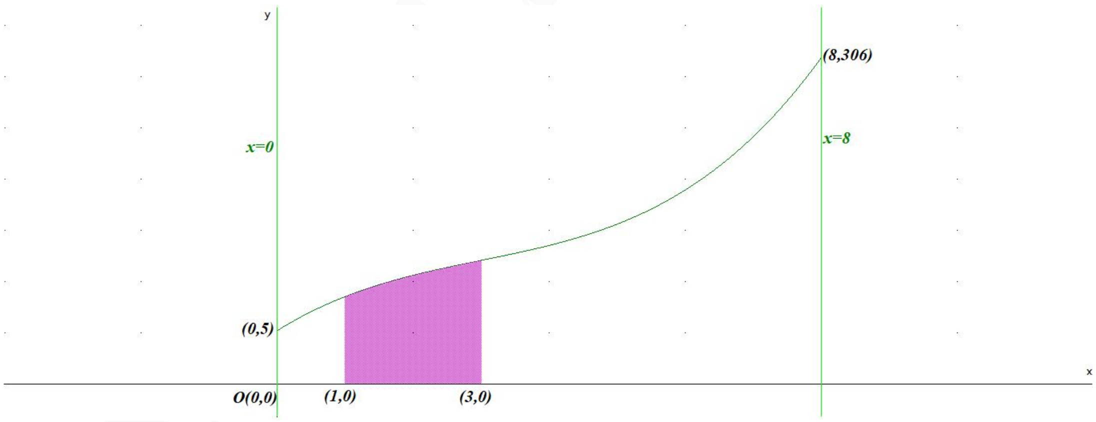
II $f(x)=x^3-9x^2+40x+50,\ \ 0\le x\le 8$

1. A la vista de la gráfica hay un punto de inflexión.
   $f''(x)=6x-18=0 \Longrightarrow x=3$ como $f'''(x)=6 \Longrightarrow f'''(3)=6\neq 0 \Longrightarrow x=3$ es un punto de inflexión $(3,116)$.

	$(0,3)$	$(3,8)$
$f''(t)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

   La función es convexa $\frown$ en el intervalo (0,3) y cóncava $\smile$ en el $(3,8)$

2. $\displaystyle\int_1^3 (x^3-9x^2+40x+50)\,dx = \frac{x^4}{4}-3x^3+20x^2+50x\Big]_1^3 = \frac{1077}{4}-\frac{269}{4}=202$
   La función es positiva y no corta el eje de abscisas en el intervalo de definición y, por tanto, tampoco en el $(1,3)$ por lo que el área encerrada entre la función el eje de abscisas en el intervalo $(1,3)$ es de $202\ u^2$.



Capítulo 3

Asturias

3.1. Modelo

- ☛ Responde en el pliego en blanco a una opción (A o B) de cuatro de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2,5 puntos**.
- ☛ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 3.1.1 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a.1 (1,75 puntos) Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.

a.2 (0,75 puntos) Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

b) (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

b.1 (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f para la que se cumple que pasa por el punto $(2, 0)$.

b.2 (2 puntos) Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo.

Solución:

a) a.1 Para hacer la representación gráfica estudiamos los siguientes apartados:

- Las ramas son polinomios y son continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-60x^2 + 160x) = 80 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) = 80 \\ f(2) = 80 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)}$$

f es continua en $x = 2$ y, por tanto, en $[0, 5]$.

- Monotonía: $f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -120x + 160 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4}{3} & \text{si} & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{10}{3}(2x - 14) = 0 \Longrightarrow x = 7 \text{ no válida} & \text{si} & 2 < x \le 5 \end{array}\right.$

	$(0, 4/3)$	$(4/3, 2)$	$(2, 5)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$

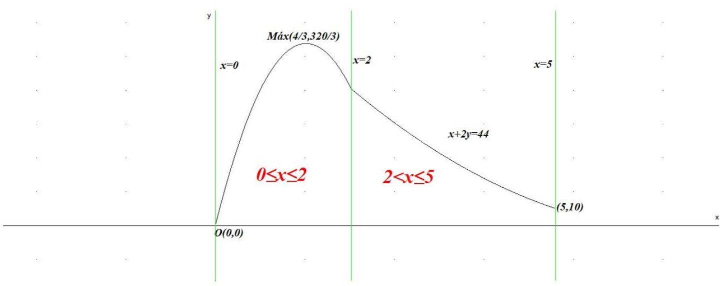
La función es creciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$ (aumenta la cantidad de etanol en sangre) y decreciente en el $\left(\dfrac{4}{3}, 5\right)$, con un máximo relativo (en nuestro caso absoluto) a las $x = \dfrac{4}{3}$ h con un nivel de etanol $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{320}{3} \simeq 106,67$ mg/dl

- Curvatura: $f''(x) = \left\{\begin{array}{lll} -120 \ne 0 & \text{si} & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{20}{3} \ne 0 & \text{si} & 2 < x \le 5 \end{array}\right.$

	$(0, 2)$	$(2, 5)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa "$\frown$" en el intervalo $(0, 2)$ y cóncava "$\smile$" en el $(2, 5)$. La función cambia de curvatura en el $(2, 80)$ punto de inflexión.

- Además tenemos: $f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $f(5) = 10 \Longrightarrow (5, 10)$



a.2 Si $x = 3 \Longrightarrow f(3) = 50$ mg/dl, luego todavía está por encima del nivel permitido y no podría conducir.
Si $x = 5 \Longrightarrow f(5) = 10$ mg/dl y estaría por debajo del nivel permitido y sí podría conducir.

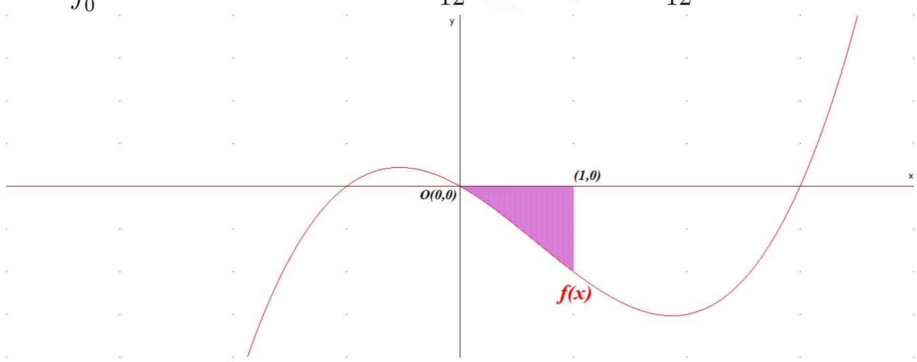
b) b.1 $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$
$F(2) = -\dfrac{22}{3} + C = 0 \Longrightarrow C = \dfrac{22}{3} \Longrightarrow$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{22}{3}$$

b.2 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = -1$ y $x = 3$. Estudiamos su signo:

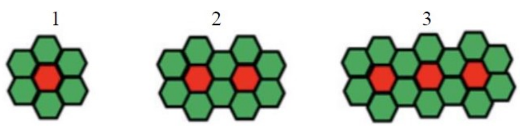
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego la función es siempre negativa entre los valores $x = 0$ y $x = 1$
Sólo habrá un recinto de integración $S_1 : [0, 1]$ y la integral será negativa. Haremos: $S = |S_1|$.
Tenemos: $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$.
$S_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{23}{12} \Longrightarrow S = |S_1| = \frac{23}{12} \simeq 1,9167\ u^2$



Problema 3.1.2 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Observa las siguientes figuras:



a.1 (2 puntos) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura.

a.2 (0,5 puntos) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué.

b) (2,5 puntos) Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

b.1 (1 punto) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué?

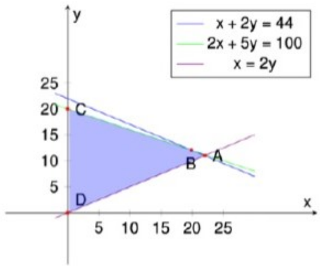


Figura 1: Región factible.

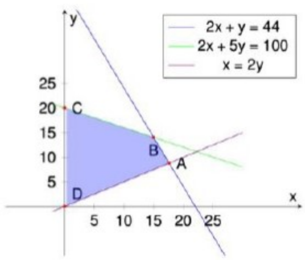


Figura 2: Región factible.

b.2 (1,5 puntos) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos?

Solución:

a) a.1 (2 puntos) Figura 1: 1 roja 6 verdes, Figura 2: 2 rojas 10 verdes, Figura 3: 3 rojas 14 verdes, Figura 4: 4 rojas 18 verdes, $\cdots\cdots$, Figura 10: 10 rojas 42 verdes.
Figura n: n rojas y $4n+2$ verdes.

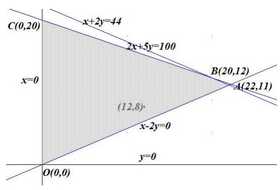
a.2 $4n + 2 = 152 \Longrightarrow n = \dfrac{150}{4} = 37,5$ lo que no es posible, n tiene que ser un número natural.

b) b.1 Sean x el nº de gorros e y el nº de bufandas.

	blanco	negro
gorros	50	40
bufandas	100	100
	2200	2000

☛ Dibujamos la región factible:

$$\begin{cases} 50x + 100y \le 2200 \\ 40x + 100y \le 2000 \\ x \le 2y \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y \le 44 \\ 2x + 5y \le 100 \\ x - 2y \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

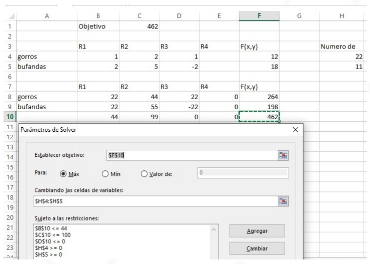


Cada uno de los puntos interiores del recinto, con coordenadas enteras, que determinan la región factible, son una solución posible, ya que cumplen todas las condiciones restrictivas del problema. El objetivo es encontrar la solución más favorable, es decir, la solución óptima.
La figura 1 sería la Región factible buscada.

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(22,11)$, $B(20,12)$ y $C(0,20)$.

☛ $f(x,y) = 12x + 18y$

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(22,11) = 462 \\ f(20,12) = 456 \\ f(0,20) = 360 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Se deberán tejer 22 gorros y 11 bufandas con unos ingresos máximos de 462 €.

b.2 El punto $P(12,8)$ se encuentra dentro de la región factible. Luego se trata de una solución posible aunque no sería la óptima.
Se deberán tejer 22 gorros y 11 bufandas con unos ingresos máximos de 462 €. Como se vio anteriormente.

Problema 3.1.3 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Dado el sistema: $\left\{\begin{array}{l} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{array}\right.$

a.1 (1,5 puntos) Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso.

a.2 (1 punto) Para $m = 3$, ¿pueden ser $(x,y) = (3,0)$ y $(x,y) = (2,-2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m = 3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta.

b) (2,5 puntos) Sean las matrices
$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

b.1 (1,5 puntos) Si $\dfrac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b.2 (1 punto) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones.

Solución:

a) $\left\{\begin{array}{l} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m-1 & m-4 & 6 \\ 2 & -1 & 2m \end{array}\right)$

a.1 $|A| = 9 - 3m = 0 \Longrightarrow m = 3$
Si $m \neq 3 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{M}) = 2 =$Rango$(M) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
Si $m = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x - 4y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2/3 \\ y = -4/3 \end{array}\right.$

a.2 Si $m = 3$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones) La solución del sistema es cualquier punto que cumpla $2x - y = 6$ o bien $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -6 + 2\lambda \end{array}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

El punto $(3,0) \Longrightarrow 2 \cdot 3 - 0 = 6$, luego es una de las infinitas soluciones posibles.
El punto $(2,-2) \Longrightarrow 2 \cdot 2 - (-2) = 6$, luego es una de las infinitas soluciones posibles.

b) b.1 $\dfrac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = \dfrac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3m \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{array} \right.$

b.2 $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 3 \\ m & 4 & 3m \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $m = -2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)
- ☛ Si $m = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (el sistema tiene infinitas soluciones)

b.3 Si $m = \pm 2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones, como se ha visto en el apartado anterior.

Problema 3.1.4 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60 % de los cromos son de personajes del «Reino Rosa» y el resto de personajes del «Reino Gris». Por otro lado, uno de cada tres cromos del «Reino Rosa» y uno de cada cinco del «Reino Gris» tienen el borde dorado.

a.1 (1,25 puntos) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

a.2 (1,25 puntos) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del «Reino Rosa»?

b) (2,5 puntos) Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3 % del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30 % de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3 % de los de tipo A y el 5 % de los de tipo C salieron defectuosos.

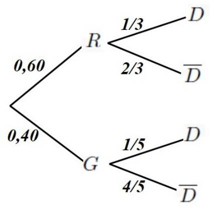
b.1 (1,25 puntos) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

b.2 (1,25 puntos) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B?

Solución:

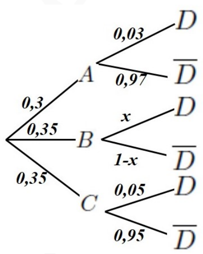
a) Sean R cromo de personaje del «Reino Rosa», G cromo de personaje del «Reino Gris», D con borde dorado y $\overline{D}$ sin borde dorado.

a.1 $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|G)P(G) = \dfrac{1}{3} \cdot 0,60 + \dfrac{1}{5} \cdot 0,40 = 0,28$



a.2 $P(R|\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D}|R)P(R)}{P(\overline{D})} = \dfrac{2/3 \cdot 0,60}{1 - 0,28} = 0,5556$

b) Sean A bolsos del tipo A, B del tipo B, C del tipo C, D defectuoso y $\overline{D}$ no defectuoso. Hacemos un árbol con las probabilidades del problema:



b.1 $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \Longrightarrow$
$0,03 = 0,03 \cdot 0,3 + x \cdot 0,35 + 0,05 \cdot 0,35 \Longrightarrow x = P(D|B) = 0,01$

b.2 $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,01 \cdot 0,35}{0,03} = 0,1167$

Problema 3.1.5 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

a.1 (1 punto) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?

a.2 (1 punto) Finalmente, se analizaron 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior?

a.3 (0,5 puntos) Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99 % de confianza, ¿este último intervalo sería más amplio o menos? ¿Por qué?

Nota: Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$ y $F(2,58) = 0,995$.

b) (2,5 puntos) El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1,2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo, con un nivel de confianza al 90 %, el intervalo de confianza $(8,5608; 8,8392)$ para estimar el nivel medio de esa hormona en la sangre de las personas en la muestra.

b.1 (1 punto) ¿Cuál fue el nivel medio de la hormona en la sangre en esas 200 personas?

b.2 (0,75 puntos) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

b.3 (0,75 puntos) Uno de los dos intervalos siguientes: $(8,5681; 8,8319)$ y $(8,5514; 8,8486)$ se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

Solución:

a) a.1 Como el valor de p es desconocido se considera el caso más desfavorable $\hat{p} = 0,5$ con el que su desviación típica sería la mayor posible.
$NC = 95\,\% = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Longrightarrow n \ge 384,16 \Longrightarrow n = 385$$

a.2 Ahora $n = 300$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{300}} = 0,0566$$

Ha disminuido el tamaño muestral y, por tanto, ha aumentado el error, por lo que la amplitud del intervalo de confianza ha aumentado empeorando la estimación.

a.3 Si aumentamos el nivel de confianza aumentamos el error, por lo que la amplitud del intervalo de confianza aumentará empeorando la estimación.

b)

$$N(\mu; 1,2),\ \ n = 200,\ \ NC = 90\,\%,\ \ IC = (8,5608; 8,8392)$$

b.1 $\overline{X} = \dfrac{8,5608 + 8,8392}{2} = 8,7$

b.2 $E = \dfrac{8,8392 - 8,5608}{2} = 0,1392$

b.3 Al disminuir el nivel de confianza se disminuye el error y, por tanto el intervalo de confianza se hace más pequeño. Luego el intervalo al $88\,\%$ debe ser $(8,5681; 8,8319)$

Capítulo 4

Cantabría

4.1. Modelo

INDICACIONES

a) El examen consta de 3 tareas obligatorias (1 por cada apartado). En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada apartado sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar.

b) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

c) Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

Problema 4.1.1 (3 puntos) Resuelva una de las siguientes opciones (a o b):

a) (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I Se pide hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$

II Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $AYA^{-1} = I$

b) (3 puntos) La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana

I Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

II Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

III ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

IV ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

a) I $X^{-1}A + A = B \Longrightarrow X^{-1}A = B - A \Longrightarrow X^{-1} = (B-A)A^{-1} \Longrightarrow$
$(X^{-1})^{-1} = ((B-A)A^{-1})^{-1} \Longrightarrow X = (A^{-1})^{-1}(B-A)^{-1} = A(B-A)^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II $AYA^{-1} = I \Longrightarrow A^{-1}AYA^{-1}A = A^{-1}IA \Longrightarrow Y = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

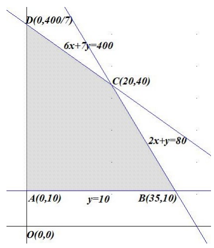
b) Sean x guías prácticas e y libros de cocina.

	reciclado	bambú	beneficio
guías	60	20	5
libros	70	10	4
	4000	800	

I $f(x,y) = 5x + 4y$ sujeto a

$$\left\{ \begin{array}{l} 60x + 70y \le 4000 \\ 20x + 10y \le 800 \\ x \ge 0 \\ y \ge 10 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x + 7y \le 400 \\ 2x + y \le 80 \\ y \ge 10 \\ x \ge 0 \end{array} \right.$$

II Representación y vértices a la derecha.



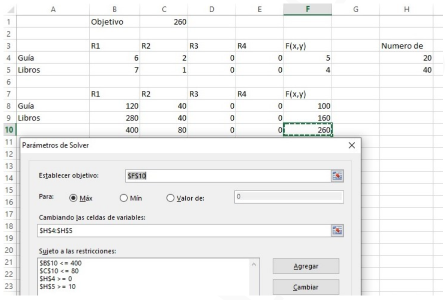
Los vértices a estudiar serán:

$$A(0,10),\ B(35,10),\ C(20,40) \text{ y } D\left(0, \frac{400}{7}\right)$$

III Sustituyendo en la función objetivo $f(x,y) = 5x + 4y$:

Solución por solver :

$$\begin{cases} f(0,10) = 40 \\ f(35,10) = 215 \\ f(20,40) = 260 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f\left(0, \dfrac{400}{7}\right) = \dfrac{1600}{7} \simeq 228,57 \end{cases} \Longrightarrow$$



deben de fabricar 20 guías prácticas sobre sostenibilidad y 40 libros de cocina vegetariana, para obtener un beneficio máximo.

IV El beneficio máximo es de 260 €.

Problema 4.1.2 (4 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^3 - x + 3 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x + 3b - 2}{x - 1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

c) Calcule la integral definida $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$

Solución:

a) Las ramas son continuas, hay que estudiar la continuidad en $x = -1$ y en $x = 2$:

☛ En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax^2 - 4) = a - 4 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x + 3) = 3 \\ f(-1) = a - 4 \end{cases} \Longrightarrow a - 4 = 3 \Longrightarrow a = 7$$

☛ En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^3 - x + 3) = 9 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 3b - 2}{x - 1} = 3b \\ f(2) = 9 \end{cases} \Longrightarrow 9 = 3b \Longrightarrow b = 3$$

b) Para $a = 7$ y $b = 3$ en el intervalo $(2, \infty)$ es $f(x) = \dfrac{x + 7}{x - 1} \Longrightarrow$

$f'(x) = -\dfrac{8}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x \in (2, \infty) \Longrightarrow f(x)$ es decreciente en este intervalo.

c) $I = \displaystyle\int_0^2 (x^3 - x + 3)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^2 = 8$

Problema 4.1.3 (3 puntos) Resuelva una de las siguientes opciones (a o b):

a) (3 puntos) Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

   I Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

   II ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

b) (3 puntos) En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

   I ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

   II ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

   III ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

   IV Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Solución:

a) I $n = 100$, $\overline{X} = 90$ y $NC = 93\,\% = 0,93 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,07 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,035$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,965 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,815$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,815\frac{10}{\sqrt{100}} = 1,815$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (90 - 1,815; 90 + 1,815) = (88,185; 91,815)$$

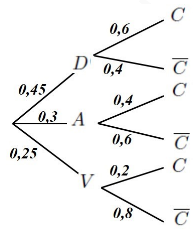
   II $NC = 97\,\% = 0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,985 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

$$E = 2 \Longrightarrow 2 = 2,17\frac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,17 \cdot 10}{2}\right)^2 = 117,7225 \Longrightarrow n = 118$$

b) Sean D practican algún deporte, A participan en actividades artísticas, V participan en actividades de voluntariado, C pertenecen al consejo estudiantil y $\overline{C}$ no pertenecen al consejo estudiantil.

I $P(D\cap C)=P(C|D)P(D)=0,6\cdot 0,45=0,27$



II $P(A\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap C)=P(A)-P(C|A)P(A)=$
$0,3-0,4\cdot 0,3=0,18$

III $P(C)=P(C|D)P(D)+P(C|A)P(A)+P(C|V)P(V)=$
$0,6\cdot 0,45+0,4\cdot 0,3+0,2\cdot 0,25=0,44$

IV $P(V|\overline{C})=\dfrac{P(\overline{C}|V)P(V)}{P(\overline{C})}=\dfrac{0,8\cdot 0,25}{1-0,44}=0,3571$

Capítulo 5

Castilla-León

5.1. Modelo

INDICACIONES:

a) **OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger cuatro ejercicios completos según se indica en cada apartado. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 4 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

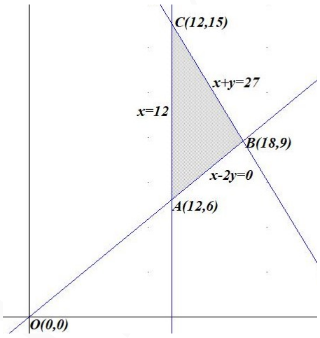
b) **CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:
Los 4 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 3 puntos en tres de ellos y 4 otro. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Problema 5.1.1 (3 puntos) Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?
Solución:
Sean x número de camiones con agua e y número de camiones con medicinas.

- ☛ Región factible:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y\le 27\\ x\ge 12\\ y\ge \dfrac{x}{2}\\ x,y\ge 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y\le 27\\ x\ge 12\\ x-2y\le 0\\ x,y\ge 0\end{array}\right.$$

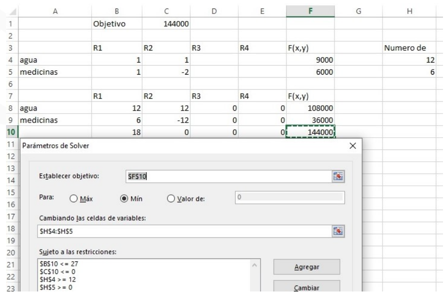


- Los vértices de la región factible son: $A(12,6)$, $B(18,9)$ y $C(12,15)$
- función objetivo: $f(x,y) = 9000x + 6000y$

Solución por solver :

$$\left\{\begin{array}{l} f(12,6) = 144000 \Longleftarrow \text{Mínimo}\\ f(18,9) = 216000\\ f(12,15) = 198000\end{array}\right.$$

El coste mínimo sería de 144000€ con un convoy de 12 camiones con agua potable y 6 de medicinas.



Problema 5.1.2 (3 puntos) Consideremos la función $f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x-1 & \text{si} & x\le 2\\ \dfrac{2x+71}{4x+7}x & \text{si} & x>2\end{array}\right.$

Responda a la siguiente cuestión:

I (1,5 puntos) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$, dibujando el recinto correspondiente.

Responda a una de las siguientes cuestiones:

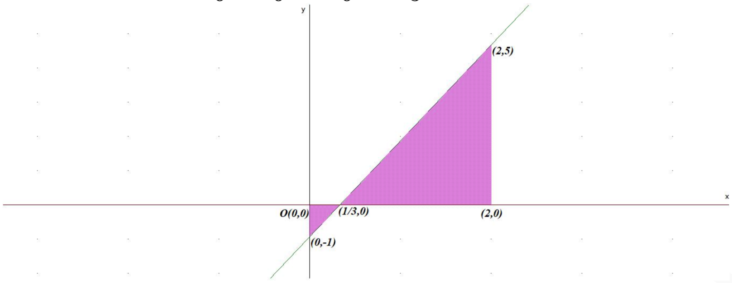
II (1,5 puntos) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

III (1,5 puntos) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2,\infty)$.

Solución:

a) la función f es una recta en el intervalo $[0,2]$, que pasa por los puntos $(0,-1)$ y $(2,5)$ y que corta al eje OX en $f(x) = 3x-1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3} \in [0,2]$ luego hay dos áreas: una negativa $S_1 : \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, la función f está por debajo del eje de abscisas, y otra positiva $S_2 : \left[\dfrac{1}{3}, 2\right]$, la función f está por encima del eje de abscisas.

$$S_1 = \int_0^{1/3} (3x-1)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} - x\right]_0^{1/3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$
$$S_2 = \int_{1/3}^{2} (3x-1)\,dx = \left.\frac{3x^2}{2} - x\right]_{1/3}^{2} = 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$
$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \simeq 4,3333\ u^2$$



b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
En la rama $x \le 2$ la función es un polinomio y, por tanto, continua en toda la rama.
En la rama $x > 2$ el denominador del cociente no se anula nunca $\Longrightarrow$ continua en toda la rama.
Continuidad en $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} (3x-1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x+71}{4x+7} = 5 \\ f(2) = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 5}$$

f es continua en $x = 2$ y, por tanto, f continua en $\mathbb{R}$.

c) En el intervalo $(2, \infty)$ la función vale $f(x) = \dfrac{2x+71}{4x+7}$ y estudiamos su monotonía:

$$f'(x) = -\frac{270}{(4x+7)^2} < 0\ \forall x \in (2, \infty) \Longrightarrow$$

La función es decreciente en el intervalo $(2, \infty)$

Problema 5.1.3 (4 puntos) Un instituto está preocupado por el impacto que el uso de redes sociales está teniendo en el rendimiento académico de sus estudiantes de bachillerato. Para investigar este tema, se revisan algunos informes publicados sobre el uso de redes sociales durante las horas de estudio. A partir de los informes revisados, se ha determinado que el 70 % de los estudiantes usa redes sociales mientras estudia y que el 30 % no lo hace. Del grupo de estudiantes que usa redes sociales, el 60 % estudia menos de 2 horas diarias, mientras que el 40 % estudia 2 o más horas al día. Del grupo que no usa redes sociales, el 20 % estudia menos de 2 horas y el 80 % estudia 2 o más horas.

Responda a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Escribir la información anterior en términos de probabilidades de sucesos.

b) (1 punto) Se selecciona al azar a un estudiante y resulta que estudia menos de 2 horas al día. Determinar si es más probable que este estudiante use redes sociales o no durante sus horas de estudio.

Responda a uno de los siguientes problemas c o d:

c) (2 puntos) Se sabe que el tiempo diario de estudio de los estudiantes sigue una distribución normal con una media de 2,5 horas y una desviación estándar de 0,5 horas.

  I (1 punto) ¿Cuál es el tiempo mínimo de estudio diario que alcanza el 90 % de los estudiantes?

  II (1 punto) Calcular la probabilidad de que un estudiante estudie entre 2 y 4,5 horas al día.

d) (2 puntos) El director del instituto selecciona 5 estudiantes al azar para entrevistarles sobre sus hábitos de estudio.

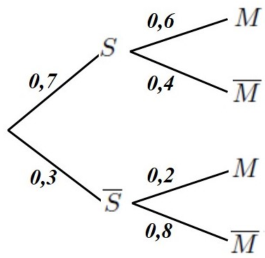
  I (1 punto) Calcular la probabilidad de que al menos 4 estudiantes usen redes sociales durante el estudio.

  II (1 punto) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de los 5 estudiantes seleccionados usen redes sociales mientras estudian.

Solución:

a) Sean S usan redes sociales, $\overline{S}$ no usan redes sociales, M estudian menos de dos horas y $\overline{M}$ estudian más de dos horas.

$P(S) = 0,7$, $P(\overline{S}) = 0,3$, $P(M|S) = 0,6$, $P(\overline{M}|S) = 0,4$, $P(M|\overline{S}) = 0,2$ y $P(\overline{M}|\overline{S}) = 0,8$



b) $P(M) = P(M|S)P(S) + P(M|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,48$

$P(S|M) = \dfrac{P(M|S)P(S)}{P(M)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,7}{0,48} = 0,875$

$P(\overline{S}|M) = \dfrac{P(M|\overline{S})P(\overline{S})}{P(M)} = \dfrac{0,2 \cdot 0,3}{0,48} = 0,125$

$P(S|M) > P(\overline{S}|M) \Longrightarrow$ lo más probable es que el estudiante que estudia menos de 2 horas usa redes sociales.

c) $N(2,5; 0,5)$

  I $P(X \geq k) = 0,9 \Longrightarrow P\left(Z \geq \dfrac{k-2,5}{0,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{k-2,5}{0,5}\right) =$
  $1 - \left(1 - P\left(Z \leq -\dfrac{k-2,5}{0,5}\right)\right) = P\left(Z \leq -\dfrac{k-2,5}{0,5}\right) = 0,9 \Longrightarrow$
  $-\dfrac{k-2,5}{0,5} = 1,285 \Longrightarrow k = 1,8575$ horas

  II $P(2 \leq X \leq 4,5) = P\left(\dfrac{2-2,5}{0,5} \leq Z \leq \dfrac{4,5-2,5}{0,5}\right) = P(-1 \leq Z \leq 4) =$
  $P(Z \leq 4) - P(Z \leq -1) = 1 - (1 - P(Z \leq 1)) = P(Z \leq 1) = 0,8413$

d) $B(5; 0,7)$

I $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) = \binom{5}{4} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^1 + \binom{5}{5} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^0 = 0,52822$

II $P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^2 = 0,3087$

Capítulo 6

Castilla-La Mancha

6.1. Modelo

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los ejercicios 3 y 4 deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. **Solo están permitidas las calculadoras de tipo 1 y 2**. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. **Duración de la prueba: 90 minutos.**

Problema 6.1.1 (2,5 puntos) Un centro de procesamiento de datos ha tomado una muestra de su consumo eléctrico en una muestra de 10 meses, obteniendo 26, 33, 25, 24, 32, 28, 38, 29, 22 y 33 MWh. Si el consumo mensual de electricidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ MWh.

a) (1 punto) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del consume eléctrico con un nivel de confianza del 97,08 %.

b) (1 punto) Calcula el tamaño mínimo necesario de una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 MWh.

c) (0,5 puntos) Razona si, con los datos y resultados disponibles, se puede afirmar que el consumo eléctrico mensual es inferior a 25 MWh.

Solución:

$$N(\mu; 5)$$

a) $n = 10$, $\overline{X} = \dfrac{26+33+25+24+32+28+38+29+22+33}{10} = 29$ y $NC = 97,08\,\% = 0,9708 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0292 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0146$

$$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9854 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,18$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,18\frac{5}{\sqrt{10}} = 3,4469$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (29 - 3,4469; 29 + 3,4469) = (25,5531; 32,4469)$$

b) $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2 = 2,18\dfrac{5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 29,7025 \Longrightarrow n = 30$ meses.

c) No, 25 MWh no se encuentra en el interior del intervalo de confianza, esa hipótesis debe ser rechazada.

Problema 6.1.2 (2,5 puntos) En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) (1,5 puntos) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.

b) (1 punto) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Sean x medallas de oro, y de plata y z de bronce.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=36\\ z=3x\\ 2(y-2)=z+2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=36\\ 3x-z=0\\ 2y-z=6 \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36\\ 3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-3F_1\\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36\\ 0 & -3 & -4 & -108\\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3+2F_2 \end{array}\right] =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36\\ 0 & -3 & -4 & -108\\ 0 & 0 & -11 & -198 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución única:
$\left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{-198}{-11}=18\\ -3y-72=-108 \Longrightarrow y=12\\ x+12+18=36 \Longrightarrow x=6 \end{array}\right.$
Se reparten 6 medallas de oro, 12 de plata y 18 de bronce.

Problema 6.1.3 (2,5 puntos) **Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes a o b**

a) El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función

$$P(x) = \left\{\begin{array}{lcl} 18x^2-100x+162 & \text{si} & 0 \leq x \leq c\\ -x^3+18x^2-96x+162 & \text{si} & c < x < 10 \end{array}\right.$$

a.1 (1 punto) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?

a.2 (0,75 puntos) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?

a.3 (0,75 puntos) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día.

b) (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que la función tiene un máximo relativo en el punto $(1,0)$, un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2$ es -9.

b.1 (1,5 puntos) Encuentra el valor de los parámetros a, b, c y d.

b.2 (1 punto) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) a.1 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^-} P(x) = \lim\limits_{x\to c}(18x^2 - 100x + 162) = 18c^2 - 100c + 162 \\ \lim\limits_{x\to c^+} P(x) = \lim\limits_{x\to c}(-x^3 + 18x^2 - 96x + 162) = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \\ P(c) = 18c^2 - 100c + 162 \end{cases} \Longrightarrow$

$18c^2 - 100c + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \Longrightarrow c^3 - 4c = 0 \Longrightarrow c = 0$ (si es válida), $c = -2$ (no válida) y $c = 2$ que si es válida.

a.2 Si $c = 2 \Longrightarrow P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si} \quad 2 < x < 10 \end{cases} \Longrightarrow$

$P'(x) = \begin{cases} 36x - 100 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{25}{9} > 2 \text{ (no válida)} & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ -3x^2 + 36x - 96 = 0 \Longrightarrow x = 4, \ x = 8 & \text{si} \quad 2 < x < 10 \end{cases}$

A partir del segundo día tenemos:

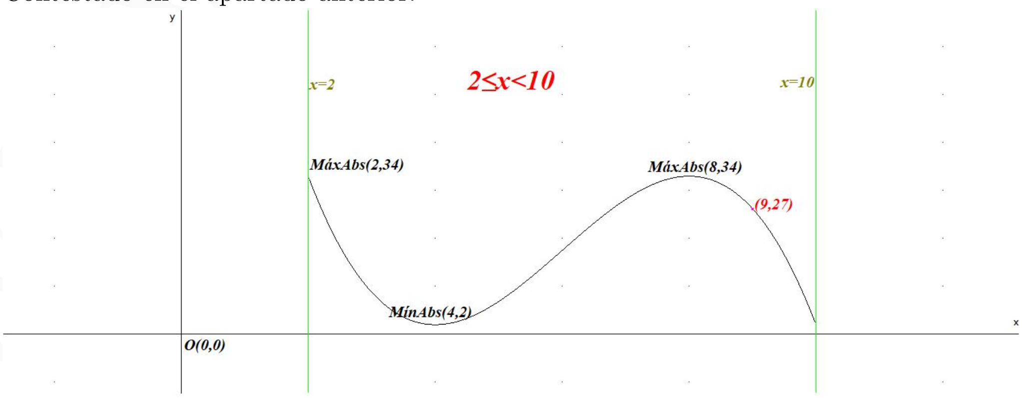
	$(2,4)$	$(4,8)$	$(8,10)$
$P'(x)$	$-$	$+$	$-$
$P(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(4,8)$ y decreciente en el $(2,4) \cup (8,10)$ con un mínimo relativo en el punto $(4,2)$ y un máximo relativo en el $(8,34)$.

Además tenemos: $P(2) = 34$ y $P(10) = 2$.

Luego el máximo absoluto es el día 2 y el 8 con 34€ alcanzando el mínimo relativo de 2€ el día 4, a partir de este momento las acciones tienden a recuperarse hasta el día 8 con un máximo relativo de 34€. A partir de ese día las acciones vuelven a devaluarse y alcanzaría el mínimo absoluto de 2€ el día 10 pero no está en el dominio de la función, si elegimos el día 9 el valor de las acciones sería 27€, podemos concluir con que el mínimo relativo el día 4 es absoluto.

a.3 Contestado en el apartado anterior:



b) (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que la función tiene un máximo relativo en el punto $(1, 0)$, un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2$ es -9.

b.1 $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2+2bx+c \Longrightarrow f''(x) = 6ax+2b \Longrightarrow f'''(x) = 6a$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a+b+c+d = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a+2b+c = 0 \\ f''(0) = 0 \Longrightarrow 2b = 0 \\ f'(2) = -9 \Longrightarrow 12a+4b+c = -9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f(x) = -x^3 + 3x - 2$$

Hay que comprobar si en $x = 0$ hay un punto de inflexión, esta afirmación es cierta ya que $f'''(0) = 6a = -6 \neq 0$

Hay que comprobar si en $x = 1$ hay un máximo, esta afirmación es cierta ya que $f''(1) = 6a + 2b = -6 < 0$

b.2 $(AB)X = CX + I \Longrightarrow (AB)X - CX = I \Longrightarrow (AB - C)X = I \Longrightarrow X = (AB - C)^{-1} =$

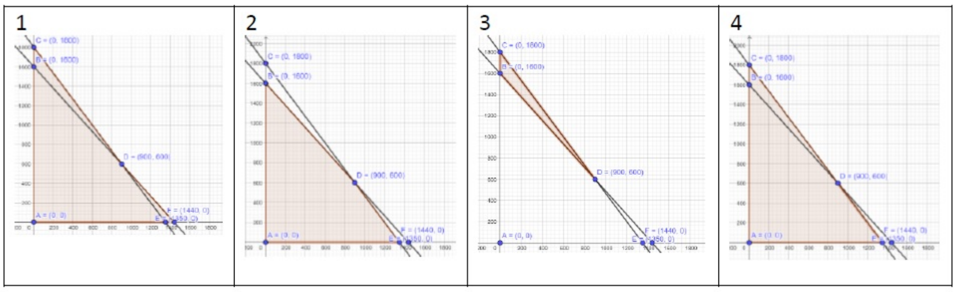
$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 6.1.4 (2,5 puntos) **Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes a o b**

a) (2,5 puntos) Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m^2 de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10€ la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m^2 de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50€ la unidad.

a.1 (0,75 puntos) Expresa la función objetivo para la venta de carpetas.

a.2 (0,75 puntos) Determina, razonadamente, cuál de las siguientes regiones factibles corresponden al problema planteado.



a.3 (1 punto) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula el beneficio.

b) (2,5 puntos) Una tienda online de telefonía ha vendido en mayo 360 teléfonos móviles, de los cuales 144 son iPhone, 126 Samsung y el resto Xiaomi. Sin embargo, se devolvieron el 4 % de los iPhone, el 5 % de los Samsung y el 3 % de los Xiaomi.

b.1 (0,75 puntos) Elegida una venta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no se produzca la devolución del teléfono?

b.2 (0,5 puntos) Si se sabe que un teléfono ha sido devuelto, ¿cuál es la probabilidad de que sea Samsung?

b.3 (1,25 puntos) Si se sabe que la venta diaria de teléfonos sigue una función de la forma: $V(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra los valores de los parámetros a, b y c sabiendo que la venta en el instante inicial es tres, $V(0) = 3$, el primer día se venden 8 móviles y la función tiene como recta tangente en ese punto la ecuación $y = 2x + 6$.

Solución:

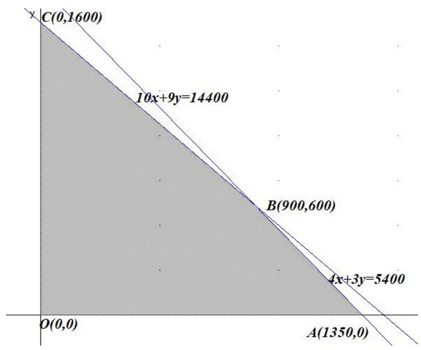
a) Sean x número de carpetas tamaño folio e y las de tamaño cuartilla.

a.1 La función objetivo es $f(x, y) = 2,10x + 1,5y$

a.2

	cartón m^2	cinta m	venta
tamaño folio	$0,20$	$0,30$	$2,10$
tamaño cuartilla	$0,15$	$0,27$	$1,50$
	≤ 270	≤ 432	

Tenemos:

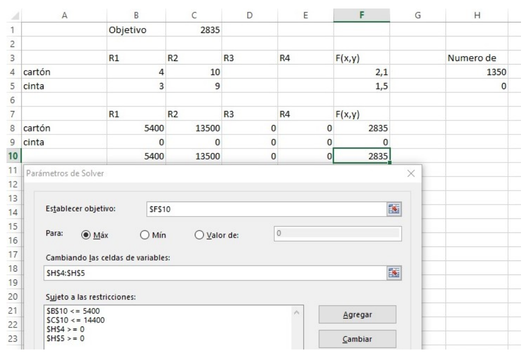


$f(x, y) = 2,10x + 1,5y$ sujeto a

$$\begin{cases} 0,2x + 0,15y \leq 270 \\ 0,3x + 0,27y \leq 432 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3y \leq 5400 \\ 10x + 9y \leq 14400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Corresponde con la región 2 del enunciado.

Solución por solver :

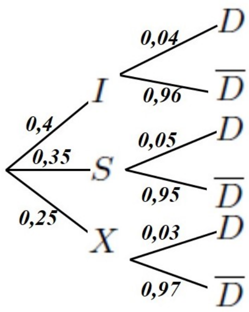


Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(1350, 0)$, $B(900, 600)$ y $C(0, 1600)$. Sustituyendo en $f(x, y) = 2,10x + 1,5y$

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(1350, 0) = 2835 \\ f(900, 600) = 2790 \\ f(0, 1600) = 2400 \end{cases}$$

a.3 El máximo se produce con la elaboración de 1350 carpetas tamaño folio y 0 de tamaño cuartilla con una venta máxima de 2835€.

b) Sean I es iPhone, S es Samsung, X es Xiaomi, D es devuelto y $\overline{D}$ no es devuelto.
$P(I) = \dfrac{144}{360} = 0,4$, $P(S) = \dfrac{126}{360} = 0,35$, $P(X) = \dfrac{360-(144+126)}{360} = 0,25$, $P(D|I) = 0,04$, $P(D|S) = 0,05$ y $P(D|X) = 0,03$



b.1 $P(\overline{D}) = P(\overline{D}|I)P(I) + P(\overline{D}|S)P(S) + P(\overline{D}|X)P(X) =$
$0,96 \cdot 0,4 + 0,95 \cdot 0,35 + 0,97 \cdot 0,25 = 0,959$

b.2 $P(S|D) = \dfrac{P(D|S)P(S)}{P(D)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,35}{1-0,959} = 0,4268$

b.3 $V(x) = ax^3 + bx^2 + c \Longrightarrow V'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$$\begin{cases} V(0) = 3 \Longrightarrow c = 3 \\ V(1) = 8 \Longrightarrow a+b+c = 8 \\ V'(1) = 2 \Longrightarrow 3a+2b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 13 \\ c = 3 \end{cases} \Longrightarrow$$

$V(x) = -8x^3 + 13x^2 + 3$

Capítulo 7

Cataluña

7.1. Modelo

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. Observe que en la pregunta 4 debe elegir sólo una de las dos **OPCIONES A o B**. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara. En su defecto, se puede descontar hasta un máximo de 0,25 puntos del valor de la pregunta.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 12, 13, 14 y 15)) para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.1.1 (2,5 puntos) Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

a) (1 punto) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi?

b) (1,5 puntos) Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio?

Solución:

a) La función que representa a la compañía A es $f(x) = 0,4x + 20$ y a la B es $g(x) = 0,01x^2 + 0,1x + 10$. Tenemos: $f(10) = 24$ € y $g(10) = 12$ €, luego es más económica la compañía B para un trayecto de 10 Km, con una diferencia de 12 €.
Si hace 80 Km tenemos $f(80) = 52$ € y $g(80) = 82$ €, luego es más económica la compañía A para un trayecto de 80 Km, con una diferencia de 30 €.
Hacemos $x = 0 \Longrightarrow g(0) = 10$ € de coste fijo en la tarifa de la compañía B.

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow 0,4x + 20 = 0,01x^2 + 0,1x + 10 \Longrightarrow 0,01x^2 - 0,3x - 10 = 0 \Longrightarrow x = 50$ Km y $x = -20$ (no válida)
Sea $h(x) = f(x) - g(x) = -0,01x^2 + 0,3x + 10 \Longrightarrow h'(x) = -0,02x + 0,3 = 0 \Longrightarrow x = 15$
Como $h''(x) = -0,02 \Longrightarrow h''(15) = -0,02 < 0 \Longrightarrow x = 15$ Km es un máximo relativo con una diferencia de precios de $h(15) = 12,25$ €

Problema 7.1.2 (2,5 puntos) Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

a) (1,25 puntos) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica.

b) (1,25 puntos) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado.

Solución:

a) Sean x unidades fabricadas por la primera fábrica, y unidades fabricadas por la segunda fábrica y z unidades fabricadas por la tercera fábrica.
$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1260 \\ y = x + z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. No podemos determinar cuántos sofás produce cada fábrica.
$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 630 - \lambda \\ y = 630 \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow$ la segunda fábrica produce 630 sofás.

b) Al sistema anterior añadimos la nueva ecuación $0,1x + 0,3y + 0,2z = 284$ y nos queda:
$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1260 \\ y = x + z \\ 0,1x + 0,3y + 0,2z = 284 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 310 \text{ sofás} \\ y = 630 \text{ sofás} \\ z = 320 \text{ sofás} \end{array}\right.$
La forma más fácil de resolver el sistema es por sustitución:
$0,1x + 0,3y + 0,2z = 284 \Longrightarrow 0,1(630 - \lambda) + 0,3 \cdot 630 + 0,2\lambda = 284 \Longrightarrow \lambda = 320 \Longrightarrow x = 630 - 320 = 310$, $y = 630$ y $z = 320$.

Problema 7.1.3 (2,25 puntos) Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

a) (1,25 puntos) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.
Nota: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0, 1)$, $P(-1,96 \le Z \le 1,96) = 0,95$.
Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con un nivel de confianza $\gamma \in (0, 1)$ viene dado por $\left[p - z_\gamma\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$

b) (1,25 puntos) Junto a esta población hay dos pueblos pequeños, que llamaremos A y B, que también podrían beneficiarse del polideportivo. El pueblo A tiene en total 250 habitantes, de los que 180 están a favor de la construcción y el resto en contra. El pueblo B tiene 175 habitantes de los que 90 están a favor y el resto en contra. Escogemos a un individuo al azar de entre todos los individuos de estos dos pueblos. ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de la construcción del polideportivo? Si sabemos que este individuo está a favor de la construcción del polideportivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea del pueblo A?

Solución:

a) $IC = \left(0,6229 - 1,96\sqrt{\frac{\frac{218}{350}\left(1-\frac{218}{350}\right)}{350}}, 0,6229 + 1,96\sqrt{\frac{\frac{218}{350}\left(1-\frac{218}{350}\right)}{350}} \right) = (0,5721; 0,6737) =$ $(57,21\,\%; 67,37\,\%)$

b) Sean A es habitante del pueblo A, B es habitante pueblo B, F es favorable a la construcción del polideportivo y $\overline{F}$ no es favorable a esa construcción.

	F	$\overline{F}$	Total
A	180		250
B	90		175
Total			

$\Longrightarrow$

	F	$\overline{F}$	Total
A	180	70	250
B	90	85	175
Total	270	155	425

$P(F) = \dfrac{270}{425} = \dfrac{54}{85} \simeq 0,6353$

$P(A|F) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{180/425}{270/425} = \dfrac{2}{3} \simeq 0,6667$

Problema 7.1.4 (2,5 puntos) Una campesina contrata a una empresa de conductores para que le lleven los tractores hasta los pueblos donde deben trabajar. Supongamos que los conductores realizan todo el trayecto a una velocidad constante.
Elija una opción **(opción a u opción b)** y responda a las preguntas de la opción elegida:

a) (2,5 puntos)

a.1 (1,25 puntos) Supongamos que un pueblo, al que se debe llevar un tractor, se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Sabemos también que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función $G(x) = 5 + \dfrac{x^2}{98}$
Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = 300\left(\dfrac{24,5}{x} + 0,02x\right)$.

a.2 (1,25 puntos) Supongamos que la campesina tenga que enviar tractores a poblaciones que se encuentren a 100, 200 y 300 km de distancia. Estos tractores pueden realizar el trayecto a 35, 25 o 15 km/h. Construya una matriz que contenga el coste total del viaje según la distancia a la que se encuentra el pueblo (columnas) y según la velocidad a la que circula el tractor (filas). Si en total debe llevar 3 tractores a una localidad que se encuentra a 100 km, 3 tractores a una localidad que se encuentra a 200 km y 2 tractores a una localidad que se encuentra a 300 km calcule, mediante un producto de matrices, cuánto le costará todo según si los tractores circulan a 35, 25 o 15 km/h.

b) (2,5 puntos)

b.1 (1,25 puntos) Si sabemos que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \dfrac{7350}{x} + 6x$. Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es ese coste?

b.2 (1,25 puntos) Supongamos que durante el trayecto existen en total tres áreas de servicio y, en cada una de ellas, el conductor decide si se detiene a descansar un poco con una probabilidad de 1/3, independientemente de si se ha parado o no en las demás áreas. Calcule cuál es la probabilidad de que no se detenga ninguna vez. ¿Cuál es la probabilidad de que se pare exactamente dos veces?

Solución:

a) a.1 Si la velocidad es x tenemos

$\dfrac{300}{x}$ h es el tiempo que tarda el conductor, por lo que paga al conductor $\dfrac{300}{x} \cdot 14,7$ €

El coste por gasto de gasóleo será: "tiempo que tarda en el viaje" por "gasto a la velocidad x" por "precio del litro de combustible"

$$\frac{300}{x} \cdot G(x) \cdot 1,96 = \frac{300}{x} \cdot \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) \cdot 1,96 \text{ €}$$

El coste total será el del conductor más el gasto de combustible:

$C(x) = \dfrac{300}{x} \cdot 14,7 + \dfrac{300}{x}\left(5 + \dfrac{x^2}{98}\right) 1,96 = 300\left[\dfrac{1}{x}\left(14,7 + \dfrac{x^2+490}{50}\right)\right] =$

$300\left[\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x^2+1225}{50}\right)\right] = 300\left(\dfrac{x^2+1225}{50x}\right) = 300\left(0,02x + \dfrac{24,5}{x}\right)$ qed

a.2 ☛ Si la población se encuentra a 300 Km tenemos $C(x) = 300\left(0,02x + \dfrac{24,5}{x}\right)$

Si $x = 35 \Longrightarrow C(35) = 420$
Si $x = 25 \Longrightarrow C(25) = 444$
Si $x = 15 \Longrightarrow C(15) = 580$

☛ Si la población se encuentra a 200 Km tenemos $C(x) = 200\left(0,02x + \dfrac{24,5}{x}\right)$

Si $x = 35 \Longrightarrow C(35) = 280$
Si $x = 25 \Longrightarrow C(25) = 296$
Si $x = 15 \Longrightarrow C(15) = 1160/3$

☛ Si la población se encuentra a 100 Km tenemos $C(x) = 100\left(0,02x + \dfrac{24,5}{x}\right)$

Si $x = 35 \Longrightarrow C(35) = 140$
Si $x = 25 \Longrightarrow C(25) = 148$
Si $x = 15 \Longrightarrow C(15) = 580/3$

Ordenamos los resultados en una tabla:

	100 km	200 km	300 km
15 km/h	580/3	1160/3	580
25 km/h	148	296	444
35 km/h	140	280	420

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 580/3 & 1160/3 & 580 \\ 148 & 296 & 444 \\ 140 & 280 & 420 \end{pmatrix}$$

El número de tractores lo ordenamos en otra tabla:

Destino	Número de tractores
a 100 km	3
a 200 km	3
a 300 km	2

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El coste será el producto de las matrices:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 580/3 & 1160/3 & 580 \\ 148 & 296 & 444 \\ 140 & 280 & 420 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 2220 \\ 2100 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Velocidad	Coste
15 km/h	2900 €
25 km/h	2220 €
35 km/h	2100 €
Total	7220 €

b) b.1 $C'(x) = -\dfrac{7350}{x^2} + 6 = 0 \Longrightarrow \dfrac{6x^2 - 7350}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 35$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0, 35)$	$(35, \infty)$
$C'(x)$	$-$	$+$
$C(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(0, 35)$ Km/h y crece en el $(35, \infty)$ Km/h con un mínimo relativo en $x = 35$ Km/h, en nuestro caso absoluto, con un coste de $C(35) = 420$ €

b.2 $B\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0,2963$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9} = 0,2222$$

Capítulo 8

Comunidad Valenciana

8.1. Modelo

BAREMO DE EXAMEN: **Se ha de contestar un Apartado del Problema 1, un Apartado del Problema 2 y el Problema 3 completo.**
En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.
Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 8.1.1 (3,5 puntos) **Responda un apartado a o b de este problema.**

a) Una empresa fabrica dos modelos de frigoríficos, A y B. Para su fabricación la empresa necesita un departamento de montaje y un departamento de pintura. Cada departamento dispone semanalmente de 100 horas. Un frigorífico del modelo A necesita 3 horas en el departamento de montaje y 1 hora en el de pintura, mientras que uno del modelo B necesita 1 hora y 2 horas, respectivamente, en cada departamento. Se pide:

   a.1 (3 puntos) ¿Qué cantidad de cada modelo debe producir la empresa para maximizar sus ganancias, si el beneficio por cada frigorífico del modelo A es de 500 euros y por cada frigorífico del modelo B es de 400 euros?

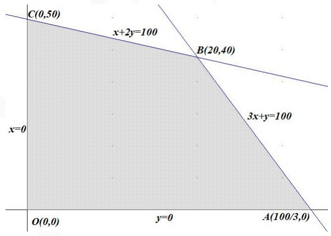
   a.2 (0,5 puntos) ¿Cuál es dicha ganancia máxima?

b) (3,5 puntos) Una papelería pone a la venta 50 bolígrafos repartidos entre tres tipos: azules, rojos y negros. El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de la cantidad de bolígrafos negros más la mitad de los bolígrafos rojos. Vende por 3,75 euros cada bolígrafo azul, por 2,25 cada bolígrafo rojo y por 1,5 cada bolígrafo negro. Sabiendo que le han robado 2 bolígrafos negros y 4 azules y que ha recaudado vendiendo el resto de los bolígrafos 159 euros, ¿cuántos bolígrafos rojos, azules y negros tenía la tienda inicialmente?
(*Planteamiento correcto 1,5 puntos y Resolución correcta 2 puntos)*

Solución:

a) Sean x el número de frigoríficos A e y los de B:

	montaje	pintura	beneficio
A	3	1	500
B	1	2	400
	≤ 100	≤ 100	



a.1 Región factible:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

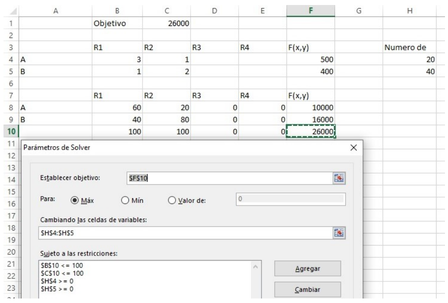
Los vértices de la región factible son: $O(0,0)$, $A(100/3,0)$, $B(20,40)$ y $C(0,50)$

La función objetivo es: $f(x,y) = 500x + 400y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(100/3,0) = 16666,667 \\ f(20,40) = 26000 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,50) = 20000 \end{cases} \Longrightarrow$$

Para obtener el máximo beneficio debe de producir 20 frigoríficos A y 40 frigoríficos B.

Solución por solver :



a.2 El beneficio máximo es de 26000€.

b) Sean x cantidad de bolígrafos azules, y cantidad de bolígrafos rojos y z cantidad de bolígrafos negros.

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ x = 11\left(\dfrac{y}{2} + z\right) \\ 3,75(x-4) + 2,25y + 1,50(z-2) = 159 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 50 \\ 2x - 11y - 22z = 0 \\ 5x + 3y + 2z = 236 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 44 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

Resolución por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & -11 & -22 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 236 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -13 & -24 & -100 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 13F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -13 & -24 & -100 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible determinado (solución única)

$$\begin{cases} 9z = 18 \Longrightarrow z = 2 \\ -13y - 48 = -100 \Longrightarrow y = 4 \\ x + 4 + 2 = 50 \Longrightarrow x = 44 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 44 \text{ bolígrafos azules} \\ y = 4 \text{ bolígrafos rojos} \\ z = 2 \text{ bolígrafos negros} \end{cases}$$

Problema 8.1.2 (3,5 puntos) **Responda un apartado a o b de este problema.**

a) Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x & \text{si} \quad x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a. (0,5 puntos) Determina el valor de a para que esta función sea continua.

a. (1,5 puntos) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $\left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$.

a. (1,5 puntos) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX.

b) El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50$$

b.1 (1,5 puntos) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo.

b.2 (1 punto) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %?

b.3 (1 punto) Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse?

Solución:

a) a.1 Las dos ramas son continuas por se polinomios. Hay que imponer la continuidad en $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (x^3 + ax^2 + 24x) = a - 25 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} ((x-1)^2 + 3) = 7 \\ f(-1) = a - 25 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)}$$

$$a - 25 = 7 \Longrightarrow a = 32$$

a.2 Si $a = 9$:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3 + 9x^2 + 24x & \text{si} & x \le -1 \\ (x-1)^2 + 3 & \text{si} & x > -1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3x^2 + 18x + 24 = 0 \Longrightarrow x = -4,\ x = -2 & \text{si} & x < -1 \\ 2(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1 & \text{si} & x > -1 \end{array}\right.$$

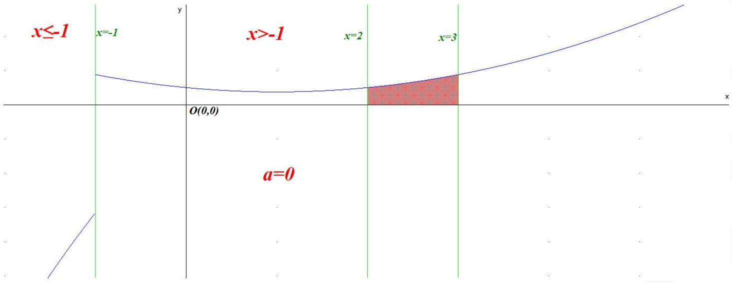
Tenemos $x = -4 \in \left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ y $x = -2 \in \left(-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$. En esta rama:

$$f''(x) = 6x + 18 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(-4) = -6 < 0 \Longrightarrow (-4, -16) \text{ Máximo relativo} \\ f''(-2) = 6 > 0 \Longrightarrow (-2, -20) \text{ Mínimo relativo} \end{array}\right.$$

a.3 La región está limitada al intervalo $[2, 3]$ luego $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4 > 0 \Longrightarrow$ la función está siempre por encima del eje de abscisas y no lo corta:

$$S = \int_2^3 (x^2 - 2x + 4)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_2^3 = \frac{16}{3} \simeq 5,3333\ u^2$$

Gráfica con $a = 0$: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$



b) El dominio de la función debe ser $[0, \infty)$ ya que el número de años tiene que ser mayor de cero.

$$f(x) = \frac{50x}{1 + x^2} + 50$$

b.1 $f(x) = \dfrac{50x}{1 + x^2} + 50 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{x^2 - 1}{(1 - x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, la solución negativa es irrelevante.

	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 1)$ (el primer año) y decreciente en el $(1, \infty)$ (a partir del primer año), con un máximo relativo en el momento en el que se cumple el primer año ($x = 1$) con un rendimiento del $f(1) = 75\,\%$

b.2 Tenemos $f(0) = 50$ y $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{50x}{1 + x^2} + 50 \right) = 50$ (asíntota horizontal)
Luego la función crece de 0 a 1 año con un rendimiento creciente entre el 50 % y el 75 %. A partir de este momento el rendimiento decrece con el paso de los años indefinidamente aproximándose por encima de 50 %.

b.3 $f(x) = \dfrac{50x}{1 + x^2} + 50 = 65 \Longrightarrow 5(3x^2 - 10x + 3) = 0 \Longrightarrow x = 3$ y $x = \dfrac{1}{3}$ (no válida $x > 1$)
Luego el rendimiento del motor baja del 65 % después del tercer año.

Problema 8.1.3 (3 puntos) **Responda al problema completo.**
Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que el estudiante esté en ESO o haya escogido música.

b) (1 punto) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

c) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"?

Solución:
Sean E estudiante de la ESO, B de Bachillerato, F elige fútbol, C elige baloncesto y M elige música.

a) Ordenando los datos en una tabla tenemos:

	F	C	M	Total
E	230	60		310
B			8	
Total	300			400

$\Longrightarrow$

	F	C	M	Total
E	230	60	20	310
B	70	12	8	90
Total	300	72	28	400

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{159}{200} \simeq 0,795$$

b) $P(E|F \cup C) = \dfrac{P(E \cap (F \cup C))}{P(F \cup C)} = \dfrac{\frac{290}{400}}{\frac{372}{400}} = \dfrac{290}{372} \simeq 0,77957$

c) $P(B) = \dfrac{90}{400}$ y $P(\overline{C}) = \dfrac{328}{400} \Longrightarrow P(B) \cdot P(\overline{C}) = \dfrac{90}{400} \cdot \dfrac{328}{400} = \dfrac{369}{2000} = 0,1845$
$P(B \cap \overline{C}) = \dfrac{78}{400} = 0,195$
Luego $P(B \cap \overline{C}) \neq P(B) \cdot P(\overline{C}) \Longrightarrow B$ y $\overline{C}$ no son independientes.

Capítulo 9

Extremadura

9.1. Modelo

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN
En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.
Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.
En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.
Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0.10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.
Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.
Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.
Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Problema 9.1.1 (4 puntos) Una compañía energética realiza un estudio de mercado entre sus clientes. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

a) (2 puntos) Los clientes de esta compañía energética pueden contratar dos productos electricidad o gas. El 75 % de los clientes contrata la electricidad. De estos clientes, sólo el 20 % contrata el gas. Se pide, justificando las respuestas:

a.1 (1 punto) ¿Qué porcentaje de clientes contrata ambos productos?

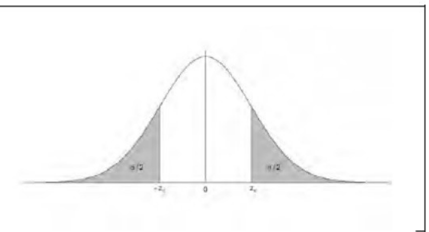
a.2 (1 punto) Si el 90 % de los clientes contrata alguno de los dos productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata el gas?

b) (2 puntos) El gasto mensual en electricidad de los clientes de esta compañía es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 clientes elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

b.1 (1 punto) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90 %, para el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía.

b.2 (1 punto) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía superó los 70 euros?

α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645



Solución:

a) Sean E Electricidad, $\overline{E}$ no electricidad, G gas y $\overline{G}$ no gas.
$P(E) = 0,75$ y $P(G|E) = 0,2$

a.1 $P(G|E) = \dfrac{P(G \cap E)}{P(E)} \Longrightarrow P(G \cap E) = P(G|E) \cdot P(E) = 0,2 \cdot 0,75 = 0,15 \Longrightarrow 15\,\%$

a.2 $P(G \cup E) = 0,9$ y tenemos $P(G \cup E) = P(G) + P(E) - P(G \cap E) \Longrightarrow$
$P(G) = P(G \cup E) + P(G \cap E) - P(E) = 0,9 + 0,15 - 0,75 = 0,3 \Longrightarrow 30\,\%$

b) $N(\mu; 16)$, $n = 81$ y $\overline{X} = 72$

b.1 $NC = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{16}{\sqrt{81}} = 2,9244$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (72 - 2,9244; 72 + 2,9244) = (69,0756; 74,9244)$$

b.2 $70 \in (69,0756; 74,9244) \Longrightarrow$ se puede afirmar que el gasto medio pudo superar los 70 euros con una confianza del 90 %.

Problema 9.1.2 (3 puntos) Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
se pide, justificando las respuestas:

a.1 (1 punto) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A.

a.2 (2 punto) Para $b = 0$, hallar la matriz X que verifique $AX = A + 2X$

b) (3 puntos) Una tienda de accesorios de telefonía móvil vende baterías externas, carcasas y cargadores a 20, 10 y 15 euros, respectivamente. Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería, 8 euros cada carcasa y 12 euros cada cargador. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros. Calcular cuántas unidades vendió de cada producto si sabemos que en total vendió 100 (las mismas que compró).

Solución:

a) a.1 $|A| = 3 - 2b = 0 \Longrightarrow$ si $b = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow \nexists A^{-1}$

a.2 $AX = A + 2X \Longrightarrow AX - 2X = A \Longrightarrow (A - 2I)X = A \Longrightarrow X = (A - 2I)^{-1}A =$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Sean x número de baterías, y de carcasas y z de cargadores.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 20x + 10y + 15z = 1210 + 340 \\ 15x + 8y + 12z = 1210 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 4x + 2y + 3z = 310 \\ 15x + 8y + 12z = 1210 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 \\ y = 20 \\ z = 50 \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 4 & 2 & 3 & 310 \\ 15 & 8 & 12 & 1210 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 15F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -1 & -90 \\ 0 & -7 & -3 & -290 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 7F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -2 & -1 & -90 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z = 50 \\ -2y - 50 = -900 \Longrightarrow y = 20 \\ x + 20 + 50 = 100 \Longrightarrow x = 30 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 30 \text{ baterías} \\ y = 20 \text{ carcasas} \\ z = 50 \text{ cargadores} \end{array}\right.$$

Problema 9.1.3 (3 puntos) Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

a) En una almazara el coste total (en euros) que supone la producción de x toneladas de determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^4 - 48x^3 + 360x^2 - 600x, \quad 5 \le x \le 13$$

Determinar, justificando la respuesta:

a.1 (0,5 puntos) La función que proporciona el coste medio por tonelada (coste unitario).

a.2 (2 puntos) La cantidad de toneladas que han de producirse para alcanzar los costes unitarios mínimo y máximo.

a.3 (0,5 puntos) Los costes unitarios máximo y mínimo que puede tener la almazara.

b) Calcular de forma razonada:

b.1 (1,5 puntos) El área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 4$.

b.2 (1,5 puntos) Las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2 - 2x - 3}$

Solución:

a) a.1 El coste medio viene determinado por la función $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 2x^3 - 48x^2 + 360x - 600$ con $5 \le x \le 13$

a.2 $C'_m(x) = 6x^2 - 96x + 360 = 0 \Longrightarrow x = 6$ y $x = 10$

$C''_m(x) = 12x - 96 \Longrightarrow \begin{cases} C''_m(6) = -24 < 0 \Longrightarrow x = 6 \text{ Máximo } (6, 264) \\ C''_m(10) = 24 > 0 \Longrightarrow x = 10 \text{ Mínimo } (10, 200) \end{cases}$

El máximo coste unitario se alcanza con la producción de 6 toneladas y el mínimo coste unitario con la producción de 10 toneladas.

a.3 Tenemos $C_m(5) = 250$, $C_m(6) = 264$, $C_m(10) = 200$ y $C_m(13) = 362$:
El coste unitario máximo es $C_m(13) = 362$ € y el coste unitario mínimo es $C_m(10) = 200$ €

b) b.1 $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$ luego la función corta al eje de abscisas dentro del intervalo $(1, 4)$ por lo que hay dos recintos de integración: $S_1 : [1, 3]$ y $S_2 : [3, 4]$.

$F(x) = \displaystyle\int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$

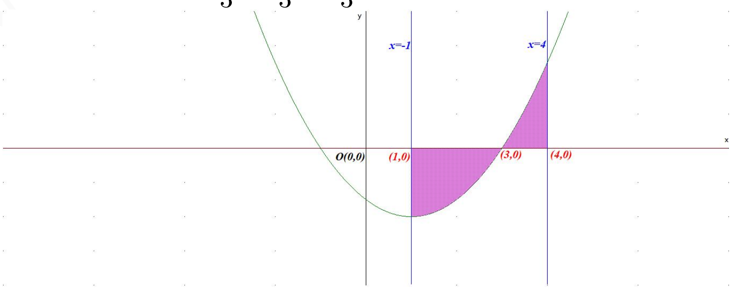
$S_1 = \displaystyle\int_1^3 (x^2 - 2x - 3)\, dx = F(3) - F(1) = -9 + \frac{11}{3} = -\frac{16}{3}$

La función está por debajo del eje de abscisas.

$S_2 = \displaystyle\int_3^4 (x^2 - 2x - 3)\, dx = F(4) - F(3) = -\frac{20}{3} + 9 = \frac{7}{3}$

La función está por encima del eje de abscisas.

$S = |S_1| + |S_2| = \dfrac{16}{3} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{23}{3} = 7,6667\ u^2$



b.2 $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-2x-3}$

- ☛ Verticales:
  - $x = -1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

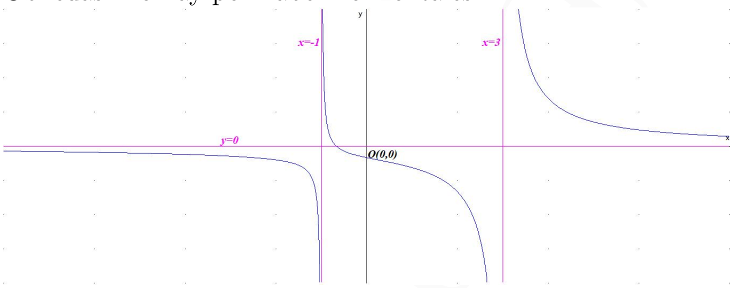
  - En $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{11}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = \left[\frac{11}{0^+}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: y=0

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to \infty} \frac{3x+2}{x^2-2x-3} = 0$$

- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.



Capítulo 10

Galicia

10.1. Modelo

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Problema 10.1.1 Probabilidad y estadística (2,5 puntos)
CONTEXTO
Los responsables municipales de la población en la que reside llevaron a cabo el año pasado un plan de renovación de los contenedores de basura, instalando nuevos contenedores de recogida selectiva. Su capacidad variará entre los 1.800 litros para los envases de materia orgánica y los 2.900 litros para los envases destinados a la recogida de envases ligeros, papel y cartón, vidrio y fracción restante. Los contenedores, además de contar con sensores inteligentes que medirán su volumen para optimizar el tráfico de camiones, se integrarán en el mobiliario urbano para reducir el impacto estético. Cuando se puso en marcha el citado plan, se tuvo en cuenta que en ocasiones son necesarias reparaciones o sustituciones por diferentes motivos: desgaste por el uso, rotura por fenómenos meteorológicos adversos, actos vandálicos, etc.
Se ha establecido que en un mes determinado la probabilidad de reparar o reemplazar al menos dos contenedores de papel y cartón es 0,1; además, que la probabilidad de reparar o sustituir al menos dos envases de envases ligeros, siendo reparados o sustituidos al menos dos envases de papel y cartón, es de 0,4. Se conoce que la probabilidad de que en un mes determinado sea necesario reparar como máximo un contenedor de papel y cartón y como máximo uno de envases ligero es de 0,72.
Responda estos tres apartados: a), b) y c).

a) Calcule la probabilidad de que en un mes determinado sea necesario reparar o sustituir más de un contenedor de los dos tipos considerados en el párrafo anterior. (1 punto)

b) Si es necesario reparar o reemplazar menos de dos contenedores de papel y cartón en un mes determinado, ¿cuál es la probabilidad de que sea necesario reparar o reemplazar dos o más contenedores de envases ligeros? (1 punto)

c) Sin realizar operaciones adicionales, indique si los sucesos "reparar o sustituir al menos dos contenedores de papel y cartón" y "reparar o sustituir al menos dos contenedores de envases ligeros" son o no independientes. ¿Le parece razonable? Justifique la respuesta. (0,5 puntos)

Solución:

Sean A "reparar o reemplazar al menos dos contenedores de papel y cartón" y B "reparar o sustituir al menos dos envases de envases ligeros".
$P(A) = 0,1$, $P(B|A) = 0,4$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,72$

a) $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04$

b) Tenemos: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,72 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,28$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,28 = 0,1 + P(B) - 0,04 \Longrightarrow P(B) = 0,22$
$P(B|\overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,22 - 0,04}{0,9} = 0,2$

c) A la vista de los resultados $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.
Sin hacer cálculos A y B son independientes si $P(B|A) = P(B)$ lo cual no se cumple.

Problema 10.1.2 ÁLGEBRA. (2,5 puntos)
Responda uno estos dos apartados: a) y b).

a) Para dos matrices A y B se verifica que

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y } 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calcule las matrices A y B. (1,25 puntos)
2. Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcule su valor. (1,25 puntos)

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones dado por:
$$x + 2y \leq 40 \quad x + y \geq 5 \quad 3x + y \leq 45 \quad x \geq 0$$
y calcule sus vértices. (1,75 puntos)
2. Calcule el punto o puntos de la región definida en el subapartado anterior donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo. (0,75 puntos)

Solución:

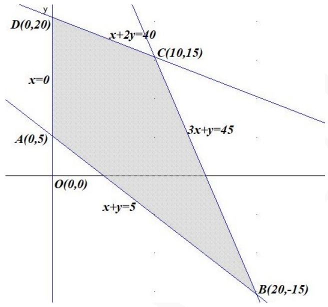
a) 1.
$$\left\{ \begin{array}{l} A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

2. $A \cdot X - B = X \Longrightarrow AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B =$
$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 5/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Región factible:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ x + y \geq 5 \\ 3x + y \leq 45 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



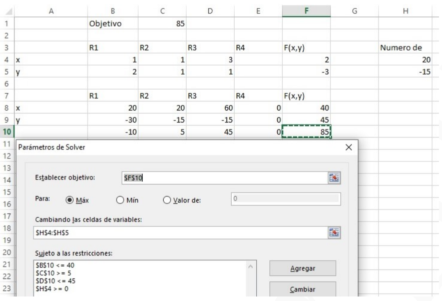
Los vértices son: $A(0,5)$, $B(20,-15)$, $C(10,15)$ y $D(0,20)$.

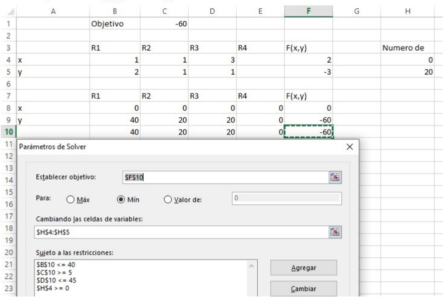
2. La función objetivo es:

$$f(x,y) = 2x - 3y \Longrightarrow \begin{cases} f(0,5) = -15 \\ f(20,-15) = 85 \text{ Máximo} \\ f(10,15) = -25 \\ f(0,20) = -60 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El máximo es 85 y se consigue en el punto $B(20,-15)$ y el mínimo es de -60 y se consigue en el punto $C(0,20)$.

Solución por solver :





Problema 10.1.3 ANÁLISIS. (2,5 puntos)
Responda uno estos dos apartados: a) y b).

a) El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & \text{si} \quad 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses. Responda los tres subapartados siguientes:

1. Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. (1 punto)
2. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden. (0,75 puntos)
3. Represente la gráfica de la función $N(t)$. (0,75 puntos)

b) Considérese la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales:

1. Calcule a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0,16)$. (1,25 puntos)

2. Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$. (1,25 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $[0,5]$, las ramas son polinomios y en $t = 3$ se cumple:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 3^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 3}(8 - t(t-2)) = 5 \\ \lim\limits_{t\to 3^+} N(t) = \lim\limits_{t\to 3}(2t-1) = 5 \\ N(3) = 5 \end{array}\right. \xRightarrow{\lim\limits_{t\to 3^-} N(t) = \lim\limits_{t\to 3^+} N(t) = N(3)}$$

$N(t)$ es continua en $t = 3 \Longrightarrow N(t)$ continua en $[0,5]$.

1. Analizamos su monotonía:

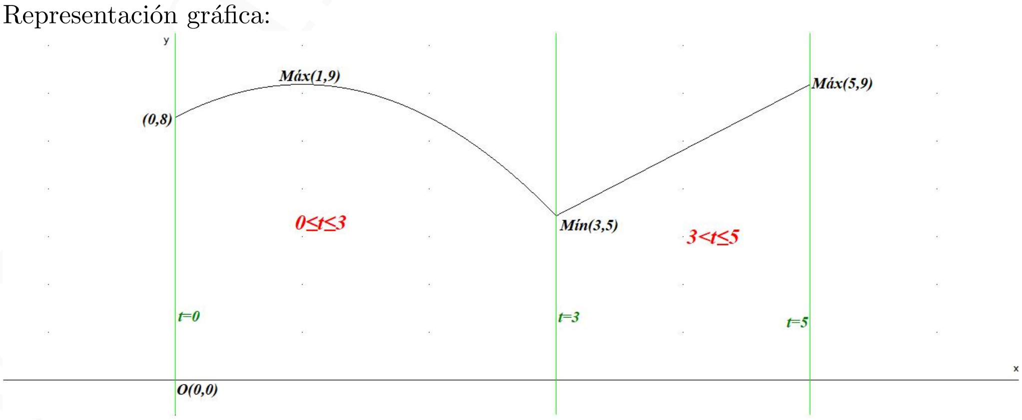
$$N'(t) = \left\{\begin{array}{lll} 2 - 2t = 0 \Longrightarrow t = 1 & \text{si} & 0 < t < 3 \\ 2 > 0 & \text{si} & 3 < t < 5 \end{array}\right.$$

	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,5)$
$N'(t)$	$+$	$-$	$+$
$N(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El número de ejemplares vendidos es creciente en el intervalo $(0,1) \cup (3,5)$ meses y decreciente en el $(1,3)$ meses. Con un máximo relativo el mes 1 con 9000 ejemplares vendidos y un mínimo relativo el mes 3 con 5000 ejemplares vendidos.

2. Además tenemos $N(0) = 8 \Longrightarrow$ 8000 ejemplares y $N(5) = 9 \Longrightarrow$ 9000 ejemplares, cantidad que coincide con el máximo, luego los extremos absolutos serían: el máximo se produce el mes 1 y el mes 5 con 9000 ejemplares vendidos y el mínimo en el mes 3 con 5000 ejemplares.

3. Representación gráfica:



b) 1. $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 - 4x + b \Longrightarrow f''(x) = 6ax - 4$

$$\left\{\begin{array}{l} f(2) = 8 \Longrightarrow 8a - 8 + 2b + c = 8 \\ f(0) = 16 \Longrightarrow c = 16 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 16 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -2x^2 + 16$$

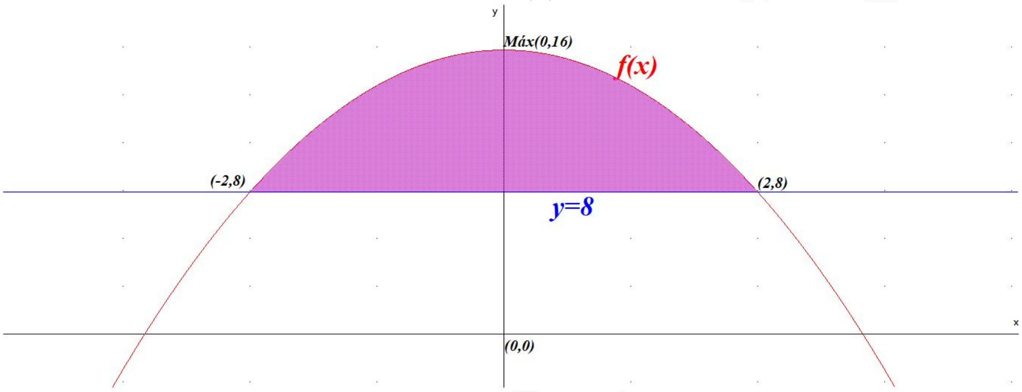
Comprobamos si hay un extremo en $x = 0$ sustituyendo en la segunda derivada: $f''(0) = -4 < 0$ luego se trata de un extremo, en particular, un máximo relativo.

2. Calculamos los puntos de corte de la función $f(x)$ con la recta $y = 8$: $-2x^2 + 16 = 8 \Longrightarrow x = \pm 2$ luego el intervalo de integración será $S_1 : [-2, 2]$

$$S_1 = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)\, dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x \Big]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$

$$S = \left|\frac{64}{3}\right| = \frac{64}{3} \simeq 21,3333\ u^2$$

La integral sale positiva al estar la función $f(x)$ por encima de la recta $y = 8$.



Problema 10.1.4 ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)
Responda uno estos dos apartados: a) y b).

a) Se estima que en una población el 20 % padece obesidad y que el 11 % padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27,5 % de los hipertensos padecen obesidad.

1. ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso? (2 puntos)
2. ¿Son independientes los sucesos "padecer obesidad" y "ser hipertensos"? (0,5 puntos)

b) Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

1. Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95 % de confianza para la media del tiempo de formación precisado. (1,25 puntos)
2. Si la media del tiempo de formación precisado es $\mu = 97$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas? (1,25 puntos)

Solución:

a) Sea O "padece obesidad" y H "es hipertenso".
$P(O) = 0,2$, $P(O \cap H) = 0,11$ y $P(O|H) = 0,275$

1. $P(O|H) = \dfrac{P(O \cap H)}{P(H)} \Longrightarrow P(H) = \dfrac{P(O \cap H)}{P(O|H)} = \dfrac{0,11}{0,275} = 0,4$
   $P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H) = 0,2 + 0,4 - 0,11 = 0,49 \Longrightarrow 49\,\%$

2. $P(O) \cdot P(H) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$
   $P(O \cap H) = 0,11 \neq P(O) \cdot P(H) \Longrightarrow O$ y H no son independientes.

b) $N(\mu; 15)$

1. $n = 25$, $\overline{X} = 97$, y $NC = 0,95$.
   $0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{25}} = 5,88$$

   $IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (97 - 5,88; 97 + 5,88) = (91,12; 102,88)$

2. Tenemos $\mu = 97$ y $n = 36 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(97; \dfrac{15}{\sqrt{36}}\right) = N(97; 2,5)$
   $P(90 \leq \overline{X} \leq 104) = P\left(\dfrac{90-97}{2,5} \leq Z \leq \dfrac{104-97}{2,5}\right) = P(-2,8 \leq Z \leq 2,8) =$
   $P(Z \leq 2,8) - P(Z \leq -2,8) = P(Z \leq 2,8) - (1 - P(Z \leq 2,8)) = 2P(Z \leq 2,8) - 1 =$
   $2 \cdot 0,9974 - 1 = 0,9948$

Capítulo 11

Islas Baleares

11.1. Modelo

Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.1.1 (4 puntos) **Contesta la opción a, y contesta también una opción a escoger entre la b y la c.**

a) **Obligatorio** En una navegación marítima, considera los sucesos:
A: hemos avistado algún albatros, y B: hemos avistado alguna ballena.
Sabemos que $P(A) = 0,75$ y que $P(A \cup B) = 0,77$.

  a.1 (1 punto) Dados los valores de $P(A)$ y $P(A \cup B)$ indicados arriba, es imposible que $P(B) = 0,01$. Justifícalo.

  a.2 (1 punto) Teniendo en cuenta que $0 \le P(A \cap B) \le 1$, ¿cuál es la máxima y la mínima probabilidad de avistar ballenas en esta situación?

b) (2 puntos) Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.
Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75 %.

c) Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7 % de probabilidades de comprar un producto A, y un 10 % de probabilidades de comprar un producto B.

  c.1 (1 punto) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6 %, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes?

  c.2 (1 punto) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"?

Solución:

a) $P(A) = 0,75$ y que $P(A\cup B) = 0,77$.

a.1 $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Longrightarrow 0,77 = 0,75+0,01-P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,76-0,77 = -0,01$ lo cual es imposible, luego $P(B)\neq 0,01$

a.2 Tenemos $0,77 = 0,75 + P(B) - P(A\cap B) \Longrightarrow P(B) = 0,02 + P(A\cap B) \xRightarrow{P(A\cap B)\geq 0} P(B) \geq 0,02$
Por otra parte $0,77 = P(A\cup B) \geq P(B) \Longrightarrow P(B) \leq 0,77$.
En conclusión: $0,02 \leq P(B) \leq 0,77$

b) $N(\mu; 150)$, $\overline{X} = 507$, $n = 50$ y $NC = 75\,\% = 0,75 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,25 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,125$

$$P(Z\leq z_{\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0,875 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,155$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,155\frac{150}{\sqrt{50}} = 24,5$$

$$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (507-24,5; 507+24,5) = (482,5; 531,5)$$

c) c.1 Tenemos $P(A) = 0,07$ y $P(B) = 0,1 \Longrightarrow P(A)P(B) = 0,007$
$P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) \Longrightarrow 0,06 = 0,07 - P(A\cap B) \Longrightarrow P(A\cap B) = 0,01$
Luego $P(A\cap B) \neq P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

c.2 Si A y B son independientes $P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0,007$
Tenemos $P(\overline{A}) = 1-P(A) = 1-0,07 = 0,93$
$P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1-0,007}{0,1} = 0,93$
Luego $P(\overline{A}) = P(\overline{A}|B)$, los dos sucesos son equiprobables.

Problema 11.1.2 (3 puntos) **Escoja sólo una opción a o b de este problema.**

a) Considera las matrices siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

a.1 (1 punto) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x?

a.2 (1 punto) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$.

a.3 (1 punto) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A?

b) (3 puntos) Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- ☛ Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- ☛ Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100€ y cada batería por 22€. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción. ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios?

Solución:

a) a.1 Tenemos $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 8$

a.2 $(A+I)(B-I) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

$(A-I)(B+I) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

$(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

Otra forma más sencilla:

$$(A+I)(B-I) + (A-I)(B+I) = (AB - AI + IB - I) + (AB + AI - IB - I) \overset{B=A^{-1}}{=}$$

$$(I - A + B - I) + (I + A - B - I) = -A + B + A - B = O$$

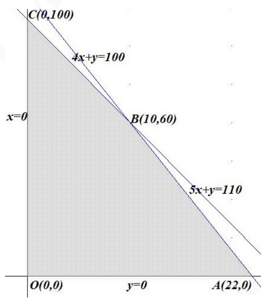
a.3 $C = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nexists y, z \in \mathbb{R}$ que cumplan esa igualdad ya que los términos $a_{21} = -5 \neq c_{21} = 7$ y $a_{22} = 2 \neq c_{22} = -1$

b) Sean x número de aspiradoras e y número de baterías electrónicas

	tiempo del operario	materias primas	venta
aspiradora	5	4	100
batería	1	1	22
	≤ 110	≤ 100	

La región factible es:

$$\begin{cases} 5x + y \leq 110 \\ 4x + y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



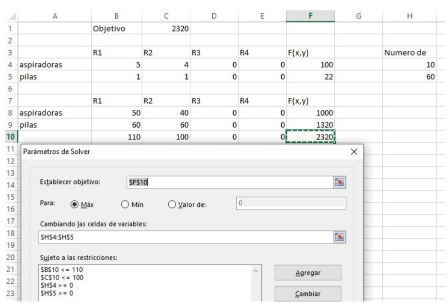
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(22,0)$, $B(10,60)$ y $C(0,100)$.

La función objetivo es:

$f(x,y) = 100x + 22y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(22,0) = 2200 \\ f(10,60) = 2320 \text{ Máximo} \\ f(0,100) = 2200 \end{cases}$$

Solución por solver :



Al máximo beneficio se llega con la fabricación y venta de 10 aspiradoras y 60 pilas electrónicas con 2320€.

Problema 11.1.3 (3 puntos) **Escoja sólo una opción a o b de este problema.**

a) Considera la función $f(x) = e^x - e^{-x}$ para $x \geq 0$

a.1 (1 puntos) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio.

a.2 (1 puntos) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$

a.3 (1 puntos) Calcula $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

b) Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500 & \text{para} \quad p = 0 \\ 300 - 3p & \text{para} \quad 0 < p < 100 \\ 0 & \text{para} \quad p = 100 \end{cases}$$

b.1 (1 puntos) Según el estudio de mercado, ¿con qué precio asistirán al espectáculo un total de 240 personas?

b.2 (2 puntos) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos?

Solución:

a) a.1 $f(0) = 1 - 1 = 0$
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^x - e^{-x}) = \infty - 0 = \infty$

a.2 $f'(x) = e^x + e^{-x}$ y $f''(x) = e^x - e^{-x}$

a.3 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = e^x + e^{-x}\Big]_0^1 = e + e^{-1} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} \simeq 1,0862$

b) b.1 $g(p) = 240 \Longrightarrow 300 - 3p = 240 \Longrightarrow p = 20$€

b.2 $I(p) = p \cdot g(p) = \begin{cases} 500p & \text{para} \quad p = 0 \\ 300p - 3p^2 & \text{para} \quad 0 < p < 100 \\ 0 & \text{para} \quad p = 100 \end{cases} \Longrightarrow$
$I'(p) = 300 - 6p = 0 \Longrightarrow p = 50$€ con $p \in (0, 100)$ Por la segunda derivada $I''(p) = -6 \Longrightarrow I''(50) = -6 < 0 \Longrightarrow p = 50$ es un máximo relativo (en este caso absoluto) La función crece en $(0, 50)$ y decrece en $(50, 100)$

Capítulo 12

Islas Canarias

12.1. Modelo

Instrucciones: Resolver el primer problema completo y en los problemas restantes elegir entre el apartado a o b. Cada problema se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

Problema 12.1.1 (2,5 puntos) **Contestar todos los apartados.**
En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros?

b) (0,75 puntos) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros?

c) (1 puntos) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes?

Solución:

a) $N(725; 50)$
$P(X \le 700) = P\left(Z \le \dfrac{700-725}{50}\right) = P(Z \le -0,5) = 1 - P(Z \le 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

b) $n = 25$, $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} = N(725; 10)$
$P(\overline{X} \ge 730) = P\left(Z \ge \dfrac{730-725}{10}\right) = P(Z \ge 0,5) = 1 - P(Z \le 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$

c) $P(X \le 710) = P\left(Z \le \dfrac{710-725}{50}\right) = P(Z \le -0,3) = 1 - P(Z \le 0,3) = 1 - 0,6179 = 0,3821$
$E[X] = 25 \cdot P(X \le 710) = 25 \cdot 0,3821 = 9,5525$ entre 9 y 10 pisos.

Problema 12.1.2 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados (a) o (b) siguientes:.**

a) Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70 % son reinetas, el 20 % fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50 % son reinetas, un 30 % golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60 % de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40 % restante del B.

a.1 (0,5 puntos) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita.

a.2 (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta?

a.3 (1 puntos) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A?

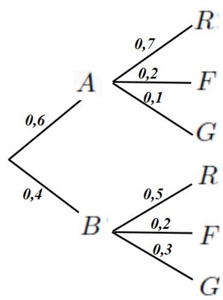
b) Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza $[16,84; 18,16]$ para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

b.1 (1,25 puntos) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo?

b.2 (1,25 puntos) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos.

Solución:

a) Sean R reineta, F fiji, G golden, A agricultor A y B agricultor B.



a.1 El árbol de probabilidad a la derecha.

a.2 $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) =$
$= 0,7 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,62$

a.3 $P(A|\overline{R}) = \dfrac{P(A \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \dfrac{0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,6}{1 - 0,62} = 0,4737$

b) b.1 $\overline{X} = \dfrac{16,84 + 18,16}{2} = 17,5$

$E = \dfrac{18,16 - 16,84}{2} = 0,66$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,66 = Z_{\alpha/2}\dfrac{4}{\sqrt{200}} \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,33 \Longrightarrow P(Z \le 2,33) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} =$
$0,9901 \Longrightarrow \alpha = 0,0198 \simeq 0,02$

$NC = 1 - \alpha \simeq 1 - 0,02 = 0,98 \Longrightarrow NC = 98\,\%$

b.2 $n = 425$ y $\overline{X} \overset{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx} = N(17,5; 0,194)$

$P(\overline{X} \ge 18) = P\left(Z \ge \dfrac{18 - 17,5}{0,194}\right) = P(Z \ge 2,58) = 1 - P(Z \le 2,58) = 1 - 0,9951 =$
$0,0049$

Problema 12.1.3 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:.**

a) La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}t^2 + 3t + 1 & \text{para} \quad t \le 4 \\ \dfrac{t+111}{5t+3} & \text{para} \quad t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a.1 (0,75 puntos) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta.

a.2 (1,25 puntos) ¿Cuándo crece y cuándo decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función.

a.3 (0,5 puntos) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2 %. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta.

b) A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = -x+4$.

b.1 (0,75 puntos) Representa la superficie de la finca.

b.2 (1 punto) Calcula el área.

b.3 (0,75 puntos) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5 % de la producción se desecha antes de recibir las ayudas?

Solución:

a.1 Supongo $t \ge 0$ dado que se trata de tiempo transcurrido.

a.1 Continuidad: La rama $t \le 4$ es un polinomio y en la rama $t > 4$ el denominador se anula en $t = -\dfrac{3}{5}$ que no está en la rama. Las dos ramas son continuas y hay que analizar la continuidad en $t = 4$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 4^-} R(t) = \lim\limits_{t\to 4}\left(-\dfrac{1}{2}t^2 + 3t + 1\right) = 5 \\ \lim\limits_{t\to 4^+} R(t) = \lim\limits_{t\to 4} \dfrac{t+111}{5t+3} = 5 \\ R(4) = 5 \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{t\to 4^-} R(t) = \lim\limits_{t\to 4^+} R(t) = R(4)}$$

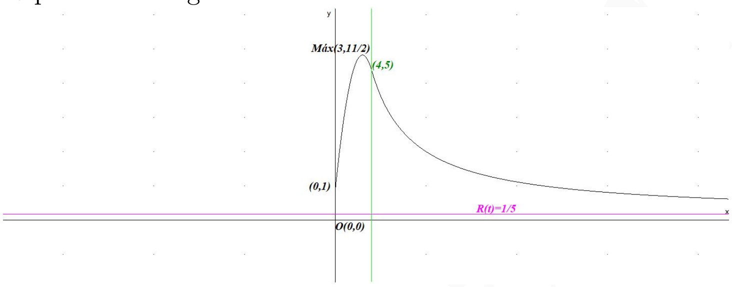
$R(t)$ es continua en $t = 4$. Luego la función es continua en $[0, \infty)$.

a.2 Monotonía:

$$R'(t) = \begin{cases} -t + 3 = 0 \Longrightarrow t = 3 & \text{para} \quad t < 4 \\ -\dfrac{552}{(5t+3)^2} < 0 & \text{para} \quad t > 4 \end{cases}$$

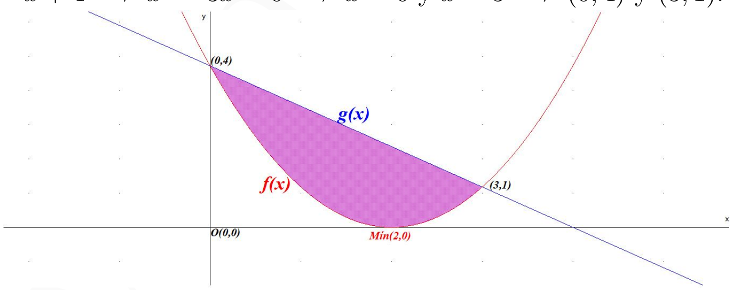
	$(0,3)$	$(3,4)$	$(4,\infty)$
$R'(t)$	$+$	$-$	$-$
$R(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 3)$
y decreciente en el $(3, \infty)$.
Tiene un máximo relativo en $\left(3; \dfrac{11}{2}\right)$ que además es absoluto.
Además tenemos $R(0) = 1$ y $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} R(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+111}{5t+3} = \frac{1}{5} = 0,2 \Longrightarrow$ hay una asíntota horizontal en $R(t) = 0,2$.
En conclusión: La rentabilidad crece hasta el tercer año donde alcanza un 5,5 % y a partir de ese año empieza a decrecer estabilizándose muy próximo al 0,2 %.
Representación gráfica:



a.3 Por lo visto en el apartado anterior, la afirmación del enunciado es cierta.

a.2 b.1 Se trata de una parábola y una recta:
La función $f(x)$ corta el eje de ordenadas en $(0, 4)$ y el de abscisas en el $(2, 0)$; $f'(x) = 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$ y $f''(2) = 2 > 0 \Longrightarrow (2, 0)$ es un mínimo relativo; además $f(x) \geq 0$.
La función $g(x)$ es una recta que corta a $f(x)$ en los puntos $f(x) = g(x) \Longrightarrow (x-2)^2 = -x + 4 \Longrightarrow x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3 \Longrightarrow (0, 4)$ y $(3, 1)$.



b.2 $S = \displaystyle\int_0^3 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\bigg]_0^3 = \frac{9}{2} = 4,5$ hectáreas.

b.3 La finca produce $45000 \cdot 4,5 = 202500$ Kg
Se desecha el 1,5 % $\Longrightarrow 202500 \cdot 0,985 = 199462,5$ Kg de producción real.
La ayuda será de $199462,5 \cdot 0,33 = 65822,625$ €

Problema 12.1.4 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:.**

a) En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a.1 (1,5 puntos) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

a.2 (1 punto) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda?

b) Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

b.1 (0,75 puntos) Plantear el correspondiente problema de programación lineal.

b.2 (1 punto) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices.

b.3 (0,75 puntos) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima?

Solución:

a.1 Sean x número de teléfonos móviles, y número de tablets y z número de ordenadores portátiles.

$$a)\ \begin{cases} 300x + 400y + 800z = 28000 \\ x = 2y \\ y = 2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 4y + 8z = 280 \end{cases}$$

$$b)\ \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 280 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 280 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 10F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 280 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} 28z = 280 \Longrightarrow z = 10 \\ y - 20 = 0 \Longrightarrow y = 20 \\ x - 40 = 0 \Longrightarrow x = 40 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 10 \end{cases}$$

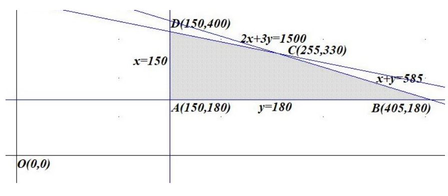
Se han vendido 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles.

a.2 Sean x número de lotes A e y número de lotes B.

	Kg frutas	Kg verduras	venta
A	2	3	18
B	3	3	20
	≤ 1500	≤ 1755	

b.1 La región factible es:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 1500 \\ 3x + 3y \leq 1755 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 585 \\ x \geq 150 \\ y \geq 180 \end{cases}$$



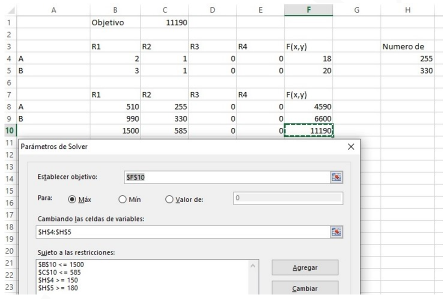
Los vértices son: $A(150, 180)$, $B(405, 180)$, $C(255, 330)$ y $D(150, 400)$.

b.2 La función objetivo es:

Solución por solver :

$$f(x,y) = 18x + 20y$$

$$\begin{cases} f(150,180) = 6300 \\ f(405,180) = 10890 \\ f(255,330) = 11190 \;\; \text{Máximo} \\ f(150,400) = 10700 \end{cases}$$



b.3 El máximo beneficio es de 11190€ y se alcanza con 255 lotes A y 330 lotes B.

Capítulo 13

La Rioja

13.1. Modelo

Sin examen modelo.

Capítulo 14

Madrid

14.1. Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 14.1.1 HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.

b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?

c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.

Solución:

a) Sea $C(t)$ la primitiva de $c(t)$, es decir, $C'(t) = c(t)$:
$C(t) = \int \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) = \frac{t^2(3-t)}{4} + K$
Tenemos $C(0) = 0 \Longrightarrow 0 + K = 0 \Longrightarrow K = 0 \Longrightarrow C(t) = \frac{t^2(3-t)}{4}$
Como 60 minutos son una hora tenemos $C(1) = \frac{1}{2} = 0,5$ mg.

b) Estudiamos la monotonía: $C'(t) = c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 2$.

	$(0,2)$	$(2,3)$
$c(t)$	$+$	$-$
$C(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$ horas y decreciente en el $(2,3)$ con un máximo relativo (en este caso absoluto) en el punto $(2,1)$.
Luego el principio activo aumenta durante las dos primeras horas, en ese momento alcanza el máximo valor y a partir de entonces decrece el principio activo de forma continua.
Por tanto, no crece de 0 a 3 horas sino de 0 a 2.

c) Como se ha explicado en el apartado anterior, el máximo de principio activo se produce a las 2 horas, momento en el que hay que dar a la niña el sobre de sabor a fresa y el principio activo en una cantidad de 1 mg.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 14.1.2 (2,5 puntos)

a) Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2.
2. (1,25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4.

b) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a+2)y = 2 \\ 2x - (a+3)y + (a+2)z = -5 \end{cases}$$

1. (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a) 1. $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I \Longrightarrow D^t + A^{-1} = B^{-1}(2I)B = 2I \Longrightarrow D^t = 2I - A^{-1} \Longrightarrow$
$D = (2I - A^{-1})^t = \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\right]^t = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]^t =$
$\begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A+2I)(A+2I) = A^2 + 2A + 2A + 4I = (A+2I) + 4A + 4I = 5A + 6I =$
$5\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) 1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -a+2 & 0 & 2 \\ 2 & -(a+3) & a+2 & -5 \end{array}\right); \quad |A| = a(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- ☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

2. Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = -1 \\ x + y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{array}\right.$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 14.1.3 Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

a) En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

1. (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.
2. (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

b) En el segundo municipio:

1. (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.
2. (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación no supere el 3 % (±3 %).

Solución:

a) En el primer municipio: $n = 600$ y $p = 0,7 \Longrightarrow B(600; 0,7)$

1. $E[X] = np = 600 \cdot 0,7 = 420$ personas estarán comprometidas con las prácticas de reciclaje. Luego las no comprometidas con estas prácticas serán $600 - 420 = 180$ personas.
2. Tenemos $n = 600 \geq 30$, $np = 420 > 5$ y $nq = 180 > 5$ luego:

$$B(600; 0,7) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(420; 11,225)$$

$P(408 \leq X \leq 432) = P\left(\dfrac{407,5 - 420}{11,225} \leq Z \leq \dfrac{432,5 - 420}{11,225}\right) = P(-1,11 \leq Z \leq 1,11) =$
$P(Z \leq 1,11) - P(Z \leq -1,11) = 2P(Z \leq 1,11) - 1 = 2 \cdot 0,8665 - 1 = 0,733$

b) En el segundo municipio:

1. $n = 450$, $\hat{p} = \dfrac{351}{450} = 0,78$ y $NC = 0,90$:
$0,90 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,645\sqrt{\dfrac{0,78 \cdot 0,22}{450}} = 0,0321$
$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,78-0,0321; 0,78+0,0321) = (0,7479; 0,8121) = (74,79\,\%; 81,21\,\%)$
2. $\hat{p} = 0,8$, $E = 3\,\% = 0,03$ y $NC = 95\,\%$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,03 = 1,96\sqrt{\dfrac{0,8 \cdot 0,2}{n}} \Longrightarrow n \geq 682,9511 \Longrightarrow n = 683$ personas.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a)** o **b)**.

Problema 14.1.4 (2,5 puntos)

a) De dos sucesos A y B sabemos que: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A}) = 0,55$, donde $\overline{A}$ es el suceso complementario de A.

1. (1 punto) Calcule $P(A|B)$
2. (1 punto) Calcule $P(\overline{B}|A)$ siendo $\overline{B}$ el suceso complementario de B.
3. (0,5 puntos) Calcule $P(\overline{A} \cap B)$.

b) En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

1. (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.
2. (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

Solución:

a) Tenemos: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A}) = 0,55$.

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 1 = (1 - 0,55) + 0,8 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,25$

   $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,25}{0,8} = 0,3125$

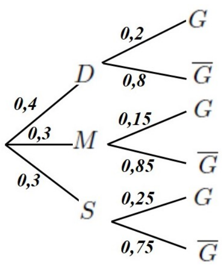
2. $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,45 - 0,25}{0,45} = 0,4444$

3. $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,25 = 0,55$.

b) Sean D los dúos nominados, M los grupos musicales, S los solistas, G ganan el premio y $\overline{G}$ no ganan el premio.

1. $P(G) = P(G|D)P(D) + P(G|M)P(M) + P(G|S)P(S) = 0,2 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,3 = 0,2$

2. $P(S|G) = \dfrac{P(G|S)P(S)}{P(G)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,3}{0,2} = 0,375$



Capítulo 15

Murcia

15.1. Modelo

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un **máximo de 4 cuestiones, una de cada problema**, y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responden las 2 cuestiones de un apartado, solo se corregirá la primera que aparezca en el cuadernillo de respuestas. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.1.1 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) (2,5 puntos)

a.1 (1,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \end{cases}$$

a.2 (1 punto) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

b) (2,5 puntos) Una empresa quiere hacer publicidad a través de anuncios en radio y en televisión. Los anuncios pueden emitirse en tres franjas horarias: franja A, franja B y franja C. El número de anuncios de cada franja que emite cada semana cada uno de los medios aparece en la tabla siguiente:

	Franja A	Franja A	Franja A
Televisión	2	10	6
Radio	5	5	6

Se quiere emitir un mínimo de 20 anuncios en la franja A, 50 en la franja B y 42 en la franja C, para lo que realiza contratos semanales con cada uno de los medios de comunicación. El coste del contrato semanal es de 3200 euros para la televisión y 2000 para la radio. ¿Cuántas semanas deberá contratar con cada uno de los medios para alcanzar su proyecto publicitario con un mínimo coste? (2 puntos) ¿cuál es el coste mínimo? (0,5 puntos).

Solución:

a) a.1

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ a & 0 & 2 & 0\\ 0 & a & -1 & a \end{array}\right);\quad |A|=a(a+1)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=-1$$

☛ Si $a\in\mathbb{R}-\{-1,0\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 3 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 3F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 3 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

☛ Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

a.2 $AX-A=BX+B\Longrightarrow AX-BX=A+B\Longrightarrow (A-B)X=A+B\Longrightarrow$

$$X=(A-B)^{-1}(A+B)=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]=$$

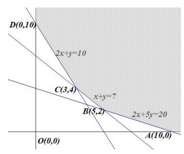
$$\begin{pmatrix} -1 & -1\\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1/2\\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1\\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2\\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sea x número de semanas con televisión e y número de semanas con radio.

	Franja A	Franja A	Franja A	Coste
Televisión	2	10	6	3200
Radio	5	5	6	2000
	≥ 20	≥ 50	≥ 42	

a) La región factible es:

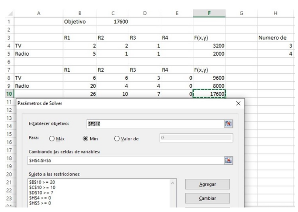
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+5y\geq 20\\ 10x+5y\geq 50\\ 6x+6y\geq 42\\ y\geq 0\\ x\geq 0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2x+5y\geq 20\\ 2x+y\geq 10\\ x+y\geq 7\\ y\geq 0\\ x\geq 0 \end{array}\right.$$



Los vértices son: $A(10,0)$, $B(5,2)$, $C(3,4)$ y $D(0,10)$

$f(x,y)=3200x+2000y$

Solución por solver :



$$\left\{\begin{array}{l} f(10,0)=32000\\ f(5,2)=20000\\ f(3,4)=17600\ \text{Mínimo}\\ f(0,10)=20000 \end{array}\right.$$

b) Se deben contratar 3 semanas en televisión y 4 en radio para obtener un gasto mínimo de 17600€.

Problema 15.1.2 (3 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \left\{\begin{array}{lcl} at - t^2 & \text{si} & 0 \le t \le 6 \\ 2t & \text{si} & 6 < t \le 10 \end{array}\right.$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a.1 (0,75 puntos) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua.

a.2 (1,5 puntos) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.

a.3 (0,75 puntos) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor.

b) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

b.1 (1 punto) $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}}$

b.2 (1 punto) $g(x) = e^{2x-1}\ln(x+2)$

b.3 (1 punto) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{1+x}}$

Solución:

a) a.1 Las dos ramas son continuas por ser polinomios, hay que imponer la continuidad en $x = 6$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 6^-} B(t) = \lim\limits_{t\to 6}(at - t^2) = 6a - 36 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} B(t) = \lim\limits_{t\to 6}(2t) = 12 \\ B(6) = 6a - 36 \end{array}\right. \xRightarrow{\lim\limits_{t\to 6^-} B(t) = \lim\limits_{t\to 6^+} B(t) = B(6)}$$

$$6a - 36 = 12 \Longrightarrow a = 8$$

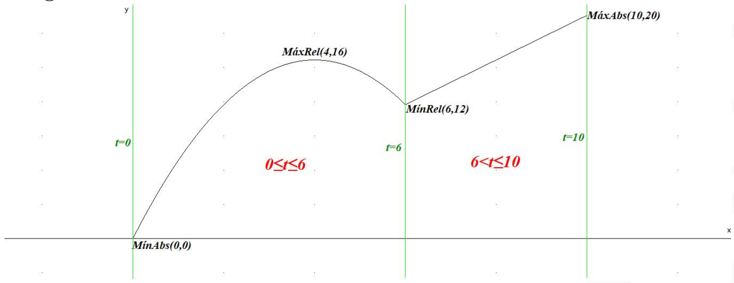
a.2 Si $a = 8 \Longrightarrow B(t) = \left\{\begin{array}{lcl} 8t - t^2 & \text{si} & 0 \le t \le 6 \\ 2t & \text{si} & 6 < t \le 10 \end{array}\right. \Longrightarrow$

$B'(t) = \left\{\begin{array}{lcl} 8 - 2t = 0 \Longrightarrow t = 4 & \text{si} & 0 \le t \le 6 \\ 2 > 0 & \text{si} & 6 < t \le 10 \end{array}\right. \Longrightarrow$

	$(0,4)$	$(4,6)$	$(6,10)$
$B'(t)$	$+$	$-$	$+$
$B(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,4) \cup (6,10)$ y decreciente en el $(4,6)$, con un máximo relativo en $t = 4$ con un beneficio de $B(4) = 16$ y un mínimo relativo en $t = 6$ con un beneficio de $B(6) = 12$.
Como $B(0) = 0$ y $B(10) = 20$ el mínimo absoluto sería en $t = 0$ (empieza sin beneficios) y el máximo absoluto sería en $t = 10$ (el último año)

Su gráfica sería:



a.3 Si $a = 8$ Como se vio en el apartado anterior, el máximo en el intervalo $(0, 6)$ se produjo en el año 4 con $B(4) = 16$.

b) b.1 $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-\sqrt[4]{3x-1} + x\frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-1)^3}}}{(\sqrt[4]{3x-1})^2} = \dfrac{-9x+4}{4\sqrt[4]{(3x-1)^5}}$

b.2 $g(x) = e^{2x-1}\ln(x+2) \Longrightarrow g'(x) = 2e^{2x-1}\ln(x+2) + e^{2x-1}\dfrac{1}{x+2} =$ $e^{2x-1}\left(2\ln(x+2) + \dfrac{1}{x+2}\right)$

b.3 $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{1+x}} \Longrightarrow \ln h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1)\right)$
$\dfrac{h'(x)}{h(x)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right) \Longrightarrow h'(x) = h(x)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x^2-1}\right) = \dfrac{1}{x^2-1}\sqrt{\dfrac{x-1}{1+x}}$

Problema 15.1.3 (2 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

b) (2 puntos) Se considera la función definida por:
$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$
Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f, la recta $x = -2$ y el eje OX.

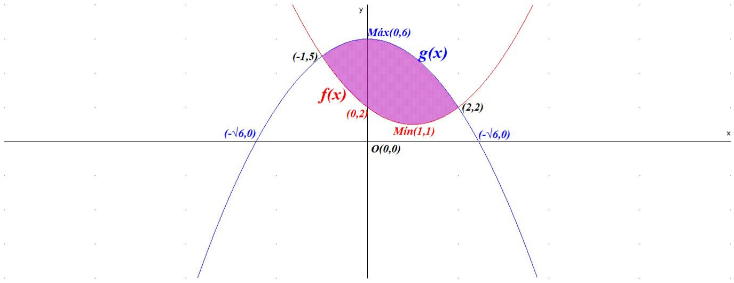
Solución:

a) ☛ f es una parábola que corta al eje de ordenadas en $(0, 2)$ y no corta al eje de abscisas. $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(1) = 2 > 0 \Longrightarrow (1, 1)$ es un mínimo.

☛ g es una parábola que corta al eje de ordenadas en $(0, 2)$ y corta al eje de abscisas en $(\pm\sqrt{6}, 0)$. $f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(1) = -2 < 0 \Longrightarrow (0, 6)$ es un máximo.

☛ Calculamos los puntos de corte de las dos gráficas:
$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 6 \Longrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2 \Longrightarrow (-1, 5)$ y $(2, 2)$.

☛ Con estos datos dibujamos las dos gráficas:



☛ $S = \left| \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx \right| = \left| \left. \dfrac{2x^3}{3} - x^2 - 4x \right]_{-1}^{2} \right| =$

$$|-9| = 9\ u^2$$

Nota: La integral ha salido negativa por estar la función g por encima de la f.

b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2 \text{ no válida} & \text{si } \quad x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 & \text{si } \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$

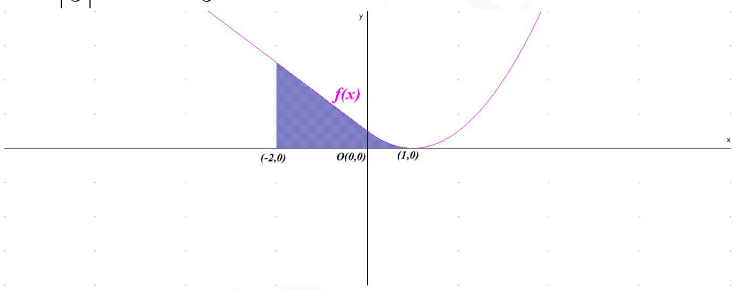
Hay dos recintos de integración $S_1 : [-2, 0]$ para la primera rama y $S_2 : [0, 1]$ para la segunda rama.

El área total será $S = |S_1| + |S_2|$:

$S_1 = \displaystyle\int_{-2}^{0} (-2x + 1)\, dx = -x^2 + x\Big]_{-2}^{0} = 6$

$S_2 = \displaystyle\int_{0}^{1} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}$

$S = \left| \dfrac{1}{3} \right| + |6| = \dfrac{19}{3} \simeq 6,3333\ u^2$



Problema 15.1.4 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) En un partido de fútbol cuatro jugadores, A, B, C y D, lanzan en este orden un penalti cada uno. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de marcar de cada uno de ellos es de $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{3}{4}$, respectivamente. Calcular:

a.1 (0,75 puntos) La probabilidad de que todos marquen gol.

a.2 (0,75 puntos) La probabilidad de que ninguno marque.

a.3 (1 punto) La probabilidad de que al menos uno de ellos marque.

b) El saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato de un instituto de Murcia se distribuye según la distribución normal $N(100, 15)$. Calcule:

b.1 (0,75 puntos) La probabilidad de que un estudiante tenga menos de 80 euros.

b.2 (1 punto) La probabilidad de que un estudiante tenga entre 90 y 110 euros.

b.3 (0,75 puntos) Si la media fuese desconocida y tuviésemos una muestra de tamaño 36, ¿cuál sería el error máximo admisible para un intervalo de confianza del 95 % para el saldo medio en la cuenta bancaria de estos estudiantes?

Solución:

a) Sean GA marca A, GB marca B, GC marca C y GD marca D

a.1 $P(GA \cap GB \cap GC \cap GD) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{40} \simeq 0,225$

a.2 $P(\overline{GA} \cap \overline{GB} \cap \overline{GC} \cap \overline{GD}) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{150} \simeq 0,0067$

a.3 $P(\text{al menos uno de ellos marque}) = 1 - P(\overline{GA} \cap \overline{GB} \cap \overline{GC} \cap \overline{GD}) = 1 - \dfrac{1}{150} = \dfrac{149}{150} \simeq 0,9933$

b) b.1 $P(X \le 80) = P\left(Z \le \dfrac{80 - 100}{15}\right) = P(Z \le -1,33) = 1 - P(Z \le 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918$

b.2 $P(90 \le X \le 110) = P\left(\dfrac{90 - 100}{15} \le Z \le \dfrac{110 - 100}{15}\right) = P(-0,67 \le Z \le 0,67) = P(Z \le 0,67) - P(Z \le -0,67) = P(Z \le 0,67) - (1 - P(Z \le -0,67)) = 2P(Z \le 0,67) - 1 = 2 \cdot 0,7486 - 1 = 0,4972$

b.3 $n = 36$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{15}{\sqrt{36}} = 4,9$ €

Capítulo 16

Navarra

16.1. Modelo

Sin examen modelo.

Capítulo 17

País Vasco

17.1. Modelo

- **El examen costa de cinco problemas:**
  - **Problema 1: de opción única y obligatoria.**
  - **Problemas del 2 al 5: de los cuatro problemas debes elegir TRES problemas. En cada uno de los problemas seleccionados hay que responder a uno de los apartados (por ejemplo: apartado 2.1 o apartado 2.2)**
- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
  - pantalla gráfica
  - posibilidad de trasmitir de datos
  - programable
  - resolución de ecuaciones
  - operaciones con matrices
  - cálculo de determinantes
  - derivadas e integrales
  - almacenamiento de datos alfanuméricos

Problema 17.1.1 (2,5 puntos) **EJERCICIO OBLIGATORIO**
La industria de la relojería ha visto un resurgimiento en la demanda de productos tradicionales y una determinada fábrica de relojes que se encuentra en un momento crucial de su desarrollo, quiere aprovechar esta tendencia.
Sin embargo, se enfrenta a ciertas restricciones de producción, como la capacidad de maquinaria, la disponibilidad de materiales y la mano de obra especializada, lo que le hace limitar la fabricación diaria a 1000 unidades.
El análisis que realiza la fábrica se centra en determinar si es más viable producir relojes de pulsera

o de bolsillo y en qué medida puede optimizar este proceso productivo. Para ello, considera varios factores. En cuanto a la facturación, hay una diferencia importante, la unidad de reloj de pulsera la vende a 90 euros, mientras que por cada uno de bolsillo ingresa 120 euros.
Por otra parte, las limitaciones de empleo de maquinaria, así como la duración de las jornadas del personal especializado, impiden la fabricación de más de 800 relojes de pulsera al día y de más de 600 de bolsillo.
Atendiendo a la situación de esta fábrica, responda a los apartados a) y b):

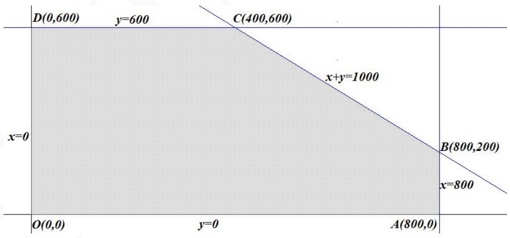
a) (2,2 puntos) ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) (0,3 puntos) ¿Cuál sería dicho ingreso?

Solución:
Sean x relojes de pulsera e y relojes de bolsillo.

a) La región factible es

$$\begin{cases} x+y\le 1000 \\ x\le 800 \\ y\le 600 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$

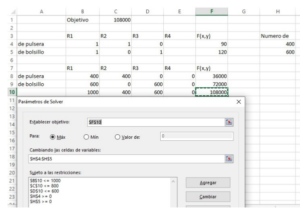


Los vértices son: $O(0,0)$, $A(800,0)$, $B(800,200)$, $C(400,600)$ y $D(0,600)$.

$F(x,y)=90x+120y$

$$\begin{cases} F(0,0)=0 \\ F(800,0)=72000 \\ F(800,200)=96000 \\ F(400,600)=108000 \text{ Máximo} \\ F(0,600)=72000 \end{cases}$$

Solución por solver :



El máximo ingreso es de 108000 € y para ello tiene que fabricar 400 relojes de pulsera y 600 relojes de bolsillo.

b) El máximo ingreso es de 108000 €.

Problema 17.1.2 (2,5 puntos) Responde solo a uno de los dos apartados.

a) En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.
La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.
¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

b) b.1 (1,25 puntos) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b.2 (1,25 punto) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M=A^t\cdot A^{-1}$$

Solución:

a) Sean x puntuación del primer problema, y la del segundo y z la del tercero.
$$\begin{cases} x+y+z=7,2 \\ x=1,4y \\ 2(x+y)=z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=7,2 \\ x-1,4y=0 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1,4 \\ y=1 \\ z=4,8 \end{cases}$$
Aitor ha obtenido 1,4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4,8 puntos en el tercero.
Por Gauss:
$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7,2 \\ 1 & -1,4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7,2 \\ 0 & -2,4 & -1 & -7,2 \\ 0 & 0 & -3 & -14,4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\text{sistema compatible deteterminado} \Longrightarrow \begin{cases} -3z=-14,4 \Longrightarrow z=4,8 \\ -2,4y-4,8=-7,2 \Longrightarrow y=1 \\ x+1+4,8=7,2 \Longrightarrow x=1,4 \end{cases}$$

b) b.1 $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -4x+3y+2=-1 \\ 2(x+y+2)=2 \\ z+2=0 \end{cases} \Longrightarrow$
$$\begin{cases} 4x-3y=-3 \\ x+y=-2 \\ z=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

b.2 $|A|=-2\neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$$M=A^t\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 17.1.3 (2,5 puntos) Responde solo a uno de los dos apartados.

a) La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:
$$f(x)=40-6x+x^2, \text{ para } x\geq 0$$
donde “x” representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a.1 (0,75 puntos) ¿Disminuye el coste alguna vez?

a.2 (0,5 puntos) Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

a.3 (0,25 puntos) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

a.4 (0,75 puntos) Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?

a.5 (0,25 puntos) Representa gráficamente la función.

b) b.1 (0,75 puntos) Sea la función $f(x)=ax^3+3x^2-5x+b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1,-3)$ y tiene un punto de inflexión en $x=-1$.

b.2 (1 punto) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x)=x^3-3x^2+7$.

b.3 (0,75 puntos) Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x=1$, $x=2$; y haz su representación gráfica.

Solución:

a) a.1 $f'(x) = -6 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 3$:

	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

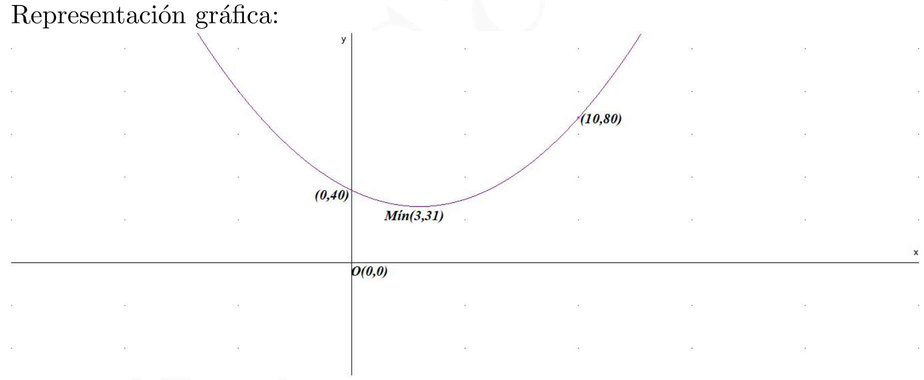
La función es decreciente en el intervalo $(0,3)$ y creciente en el $(3,\infty)$.
La función tiene un mínimo relativo en $(3,31)$.
El coste disminuye entre 0 y tres unidades.

a.2 El coste mínimo se produce con 3 unidades y es de 31000 €

a.3 $f(0) = 40000$ €.

a.4 $f(x) = 40 - 6x + x^2 = 80 \Longrightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Longrightarrow x = 10$ y $x = -4$ (no válida)
Con la producción de 10 unidades habría un coste de 80000 €

a.5 Representación gráfica:



b) b.1 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 6$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = -3 \Longrightarrow a + 3 - 5 + b = -3 \\ f''(-1) = 0 \Longrightarrow -6a + 6 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 2$$

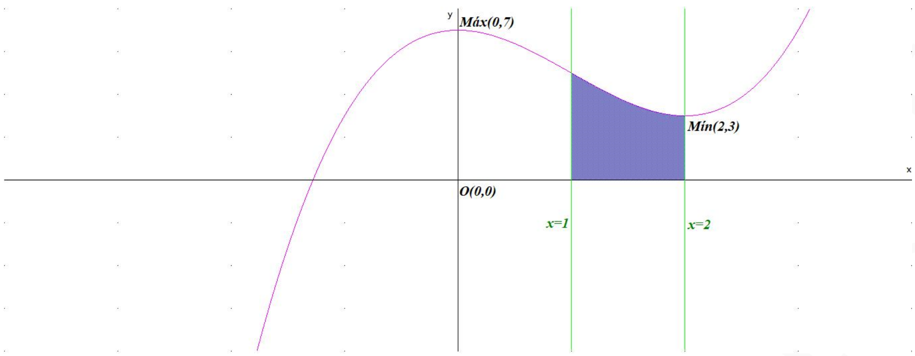
Comprobamos que en $x = -1$ hay un punto de inflexión: $f'''(x) = 6a = 6 \Longrightarrow f'''(-1) = 6 \neq 0 \Longrightarrow x = -1$ es un punto de inflexión.

b.2 Monotonía:
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \Longrightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$:

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,0) \cup (2,\infty)$ y decreciente en el $(0,2)$.
La función tiene un máximo relativo en $(0,7)$ y un mínimo relativo en $(2,3)$.

b.3 Con los datos del apartado anterior y haciendo una tabla de valores dibujamos:



$$S=\int_1^2(x^3-3x^2+7)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-x^3+7x\right]_1^2=\frac{15}{4}\simeq 3,75\ u^2$$

Problema 17.1.4 (2,5 puntos) Responde solo a uno de los dos apartados.

a) En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a.1 (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.

a.2 (1,25 puntos) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

a.3 (0,75 puntos) Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

b) Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

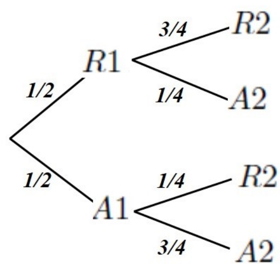
b.1 (0,75 puntos) Sabemos que $P(A)=0,4$, $P(B)=0,3$ y $P(A\cup B)=0,5$
Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b.2 (1 punto) Sabemos que $P(C)=0,5$, $P(D)=0,6$ y $P(C\cup D)=0,7$
Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

b.3 (0,75 puntos) Sabemos que $P(A)=0,4$; $P(E)=0,6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución:

a) Sean $R1$ bola roja en la primera extracción, $A1$ bola azul en la primera extracción, $R2$ bola roja en la segunda extracción y $A2$ bola azul en la segunda extracción.



a.1 $P(R2|A1)=\dfrac{1}{4}=0,25$

a.2 $P(A2)=P(A2|A1)P(A1)+P(A2|R1)P(R1)=$
$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=0,5$

a.3 $P(R1|A2)=\dfrac{P(A2|R1)P(R1)}{P(A2)}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}=0,25$

b) b.1 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Longrightarrow 0,5=0,4+0,3-P(A\cap B)\Longrightarrow P(A\cap B)=0,2$

b.2 $P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)\Longrightarrow 0,7=0,5+0,6-P(C\cap D)\Longrightarrow P(C\cap D)=0,4$

$P(C|D)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0,4}{0,6}=\dfrac{2}{3}\simeq 0,6667$

b.3 A y E independiente: $P(A\cap E)=P(A)P(E)=0,4\cdot 0,6=0,24$

$P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E)=0,4+0,6-0,24=0,76$

Problema 17.1.5 (2,5 puntos) Responde solo a uno de los dos apartados.

a.1 En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) (1 punto) Obtén el intervalo característico para el 80 %.

b) (0,3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) (0,8 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) (0,4 puntos) Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

a.2 Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\overline{x}=98 \text{ puntos y } s=15 \text{ puntos}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos".
¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Solución:

a) $N(210;\sqrt{144})=N(210;12)$

a.1 $NC=0,80=1-\alpha\Longrightarrow \alpha=0,2\Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2}=0,1$

$P(Z\le Z_{\alpha/2})=1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,1=0,9\Longrightarrow Z_{\alpha/2}=1,285$

$E=Z_{\alpha/2}\cdot\sigma=1,285\cdot 12=15,42$

$IC=(\mu-E,\mu+E)=(210-15,42;210+15,42)=(194,58;225,42)$

a.2 $P(X\ge 228)=P\left(Z\ge\dfrac{228-210}{12}\right)=P(Z\ge 1,5)=1-P(Z\le 1,5)=1-0,9332=0,0668$

a.3 $P(200\le X\le 210)=P\left(\dfrac{200-210}{12}\le Z\le\dfrac{210-210}{12}\right)=P(-0,83\le Z\le 0)=$
$P(Z\le 0)-P(Z\le -0,83)=P(Z\le 0)-(1-P(Z\le 0,83))=$
$0,5-(1-0,7967)=0,2967$

a.4 $n=30\Longrightarrow \overline{X}\overset{N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}{\approx}N(210;2,191)$

$P(\overline{X}\le 207)=P\left(Z\le\dfrac{207-210}{2,191}\right)=P(Z\le -1,37)=1-P(Z\le 1,37)=$
$1-0,9147=0,0853$

b) $E = \dfrac{101,5 - 94,5}{2} = 3,5$

$E = z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3,5 = z_{\alpha/2}\dfrac{15}{\sqrt{100}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,3333$

$P(Z \le z_{\alpha/2}) = P(Z \le 2,33) = 0,9901 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0198$

$NC = 1 - \alpha = 1 - 0,0198 = 0,9802 = 98,02\,\%$

La confianza con la que se ha hecho la afirmación del enunciado es del $98,02\,\%$.

Capítulo 18

Resúmenes teóricos

18.1. Álgebra

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

☛ **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.

☛ **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.

☛ **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

☛ La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.
- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

Matriz de términos independientes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- ☛ Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.
- ☛ Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

18.2. Análisis

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\, dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{f'}{f}\, dx = \ln\lvert f\rvert$
Exponencial	$\int e^x\, dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\, dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\, dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\, dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\, dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\, dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\, dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\, dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\, dx = \tan f$
	$\int (1+\tan^2 x)\, dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1+\tan^2 f)\, dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\, dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\, dx = -\cot f$
	$\int (1+\cot^2 x)\, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1+\cot^2 f)\, dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\, dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\, dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\, dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\, dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\, dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\, dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\, dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano − Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\, dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- ☛ Si $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- ☛ Si $\lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h\longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt \text{ donde } c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a,b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a,b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\dfrac{A}{B}\right)\cdot\infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \dfrac{A}{B}$

Si $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x)-1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \; o \; \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1+x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x\ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \dfrac{\pi}{2} - x$

18.3. Probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

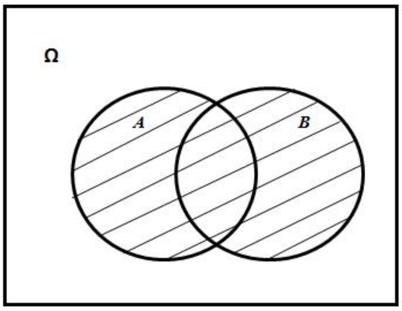
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N\longrightarrow\infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

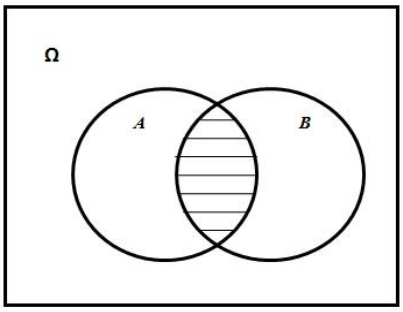
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

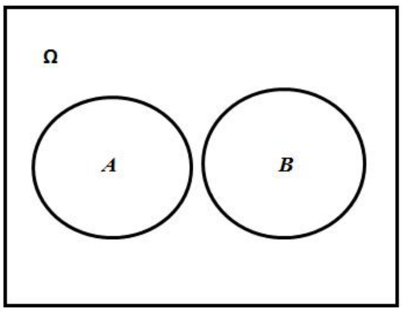
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



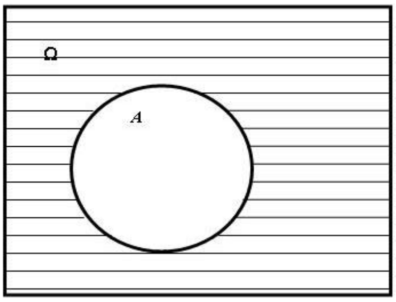
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

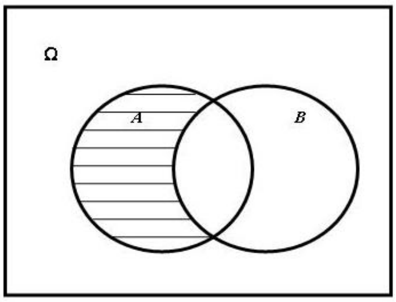
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



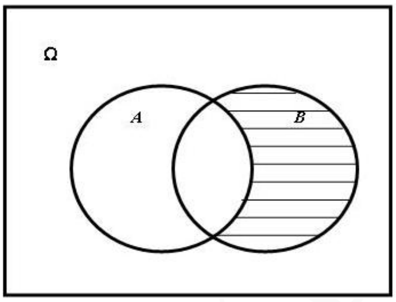
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



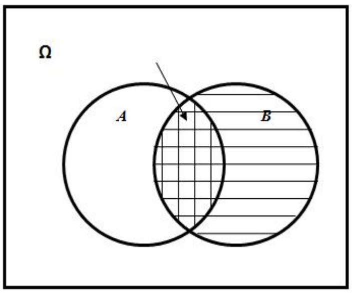
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

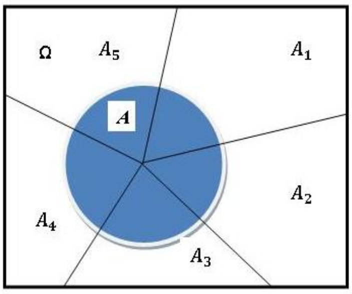
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

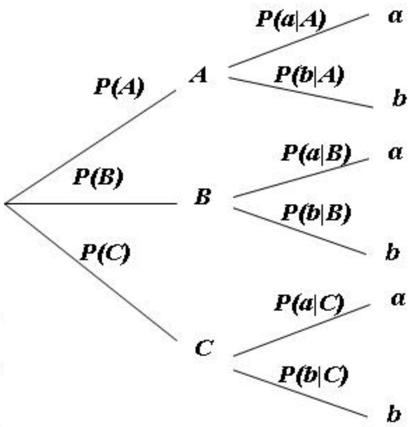
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475}, \ \ P(N|M) = \frac{200}{210}, \ \ P(B) = \frac{45}{1000}, \ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$

18.4. Estadística

Gráficos:

- Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i, \;\; p(x_i) = p_i, \;\; \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i, \;\; \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

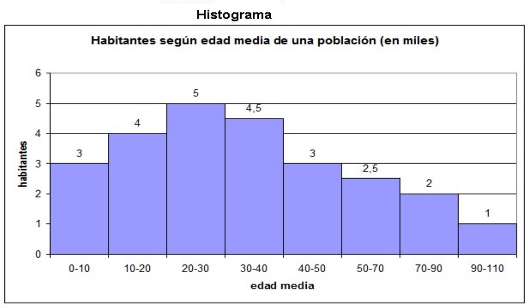
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

- Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i, \;\; f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i}, \;\; \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $\mathrm{B}(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $\mathrm{B}(7, 0, 4) \Longrightarrow n = 7$, $p = 0,4$ y $q = 0,6$:

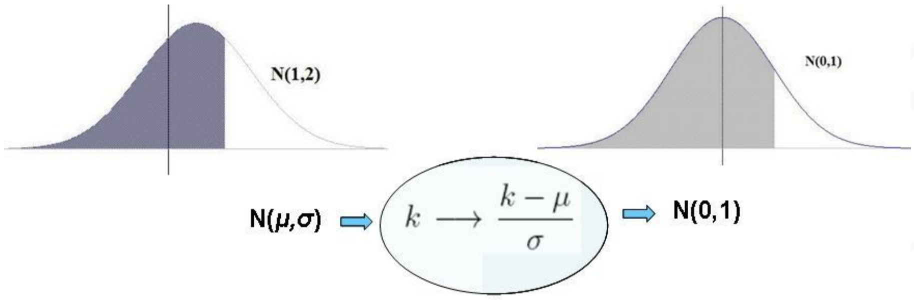
$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \text{ ó}$$

$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$:

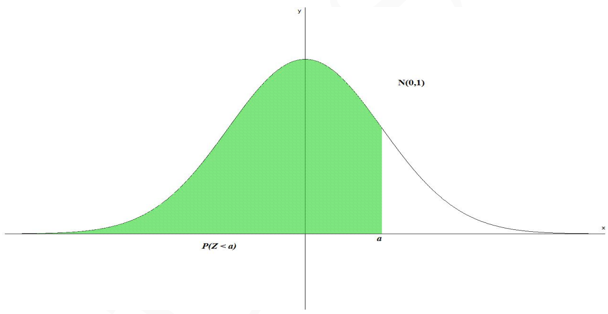
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ a otra $\mathrm{N}(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$ entoces Z seguirá una normal $\mathrm{N}(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np,\sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu,\sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

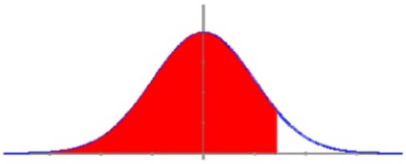
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \le z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Agradecimientos

- ✎ A las Universidades por la publicación de los exámenes oficiales.
- ✎ A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (https://aprendeconmigomelon.com) por sus correcciones.
- ✎ A Juan Antonio Martínez (https://www.ebaumatematicas.com) por el contenido de su página, me ha servido para contrastar resultados.
- ✎ A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo. Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas, acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos. He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.