Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Marzo 2025

Problema 1 Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) (1,75 puntos) Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.

b) (0,75 puntos) Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Solución:

a) ☛ Las ramas son polinomios y son continuas en el dominio de la función. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-60x^2 + 160x) = 80 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) = 80 \\ f(2) = 80 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 80 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 2$ y, por tanto, en $[0, 5]$.

☛ Monotonía: $f'(x) = \begin{cases} -120x + 160 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4}{3} & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{10}{3}(2x - 14) = 0 \Longrightarrow x = 7 \text{ no válida} & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$

	$(0, 4/3)$	$(4/3, 2)$	$(2, 5)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	decreciente ↘

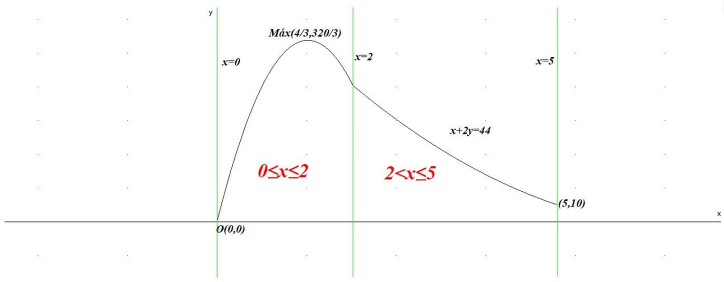
La función es creciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$ (aumenta la cantidad de etanol en sangre) y decreciente en el $\left(\dfrac{4}{3}, 5\right)$, con un máximo relativo (en nuestro caso absoluto) a las $x = \dfrac{4}{3}$ h con un nivel de etanol $f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{320}{3} \simeq 106,67$ mg/dl

- Curvatura: $f''(x) = \begin{cases} -120 \neq 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{20}{3} \neq 0 & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \end{cases}$

	$(0,2)$	$(2,5)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa "$\frown$" en el intervalo $(0,2)$ y cóncava "$\smile$" en el $(2,5)$. La función cambia de curvatura en el $(2,80)$ punto de inflexión.

- Además tenemos: $f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $f(5) = 10 \Longrightarrow (5,10)$



b) Si $x = 3 \Longrightarrow f(3) = 50$ mg/dl, luego todavía está por encima del nivel permitido y no podría conducir.
Si $x = 5 \Longrightarrow f(5) = 10$ mg/dl y estaría por debajo del nivel permitido y sí podría conducir.

Problema 2 Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x^3 - 2x^2 - 3x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$

$F(2) = -\dfrac{22}{3} + C = 0 \Longrightarrow C = \dfrac{22}{3} \Longrightarrow$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{22}{3}$$

b) ☛ $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

☛ Puntos de corte en:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$, $(-1, 0)$ y $(3, 0)$

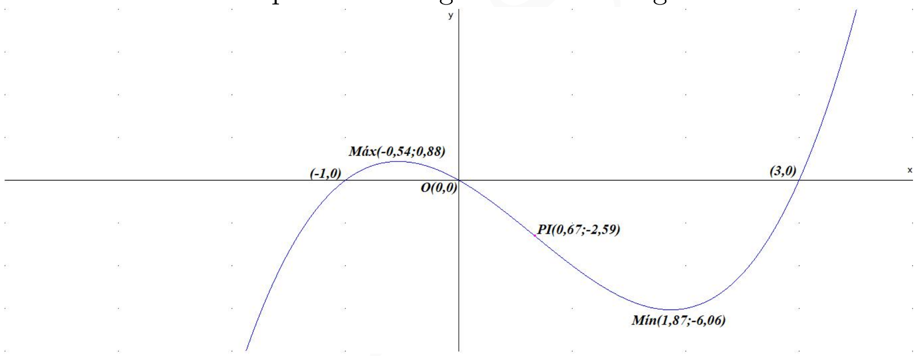
☛ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1,87$ y $x = -0,54$
$f''(x) = 6x - 4 \Longrightarrow f''(1,87) > 0 \Longrightarrow (1,87; -6,06)$ es un mínimo relativo.
$f''(x) = 6x - 4 \Longrightarrow f''(-0,54) < 0 \Longrightarrow (-0,54; 0,88)$ es un máximo relativo.

☛ $f''(x) = 6x - 4 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0\ \forall x \Longrightarrow (0,67; -2,59)$ es un punto de inflexión.

	$(-\infty; 0,67)$	$(0,67; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa "$\frown$" en el intervalo $(-\infty; 0,67)$ y cóncava "$\smile$" en el $(0,67; \infty)$.

☛ Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



c) Tendríamos tres recintos: S_1 en $[-2, -1]$ y S_2 en $[-1, 0]$ y S_3 en $[0, 1]$ con $S = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

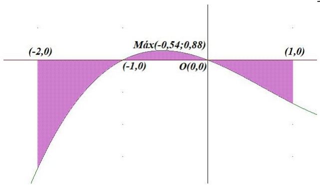
Tenemos: $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{22}{3}$.

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = F(-1) - F(-2) = -\frac{7}{12} - \frac{10}{3} = -\frac{47}{12}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = 0 + \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

$$S_3 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{23}{12} - 0 = -\frac{23}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{47}{12} + \frac{7}{12} + \frac{23}{12} = \frac{77}{12} \simeq 6,4167\ u^2$$



Problema 3 El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si} \quad 0 \le x \le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000} - \dfrac{3x}{5} + a & \text{si} \quad 200 < x \le 300 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) (1,75 puntos) Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, 300]$. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Solución:

a) Continuidad de f:

- ☛ Las dos ramas son polinomios y, por tanto, son continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 200$
- ☛ Continuidad en $x = 200$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 200^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 200} \left(\dfrac{-x^2}{2000} + 50 \right) = 30 \\ \lim\limits_{x \to 200^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 200} \left(\dfrac{x^2}{1000} - \dfrac{3x}{5} + a \right) = a - 80 \\ f(200) = 30 \end{cases}$$
$$\xRightarrow{\lim\limits_{x \to 200^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 200^+} f(x) = f(200)} 30 = a - 80 \Longrightarrow a = 110.$$
- ☛ La función es continua en $\mathrm{Dom}(f) = [0, 300]$ siempre que $a = 110$.

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000} + 50 & \text{si} \quad 0 \le x \le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000} - \dfrac{3x}{5} + 110 & \text{si} \quad 200 < x \le 300 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{1000} & \text{si} \quad 0 < x < 200 \\ \dfrac{x}{500} - \dfrac{3}{5} & \text{si} \quad 200 < x \le 300 \end{cases}$$

Tenemos $f(0) = 50$, $f(200) = 30$ y $f(300) = 20$.

Por otra parte:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{1000}=0\Longrightarrow x=0 & \text{si} \quad 0<x<200 \\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5}=0\Longrightarrow x=300 & \text{si} \quad 200<x\le 300 \end{cases}$$

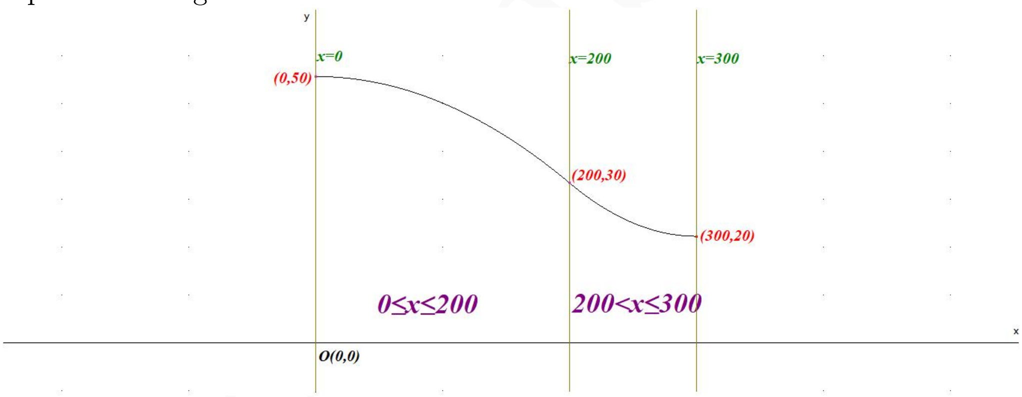
	$(0,200)$	$(200,300)$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en todo el dominio de f con un máximo relativo (también es absoluto) en $(0,50)$ y un mínimo relativo (también absoluto) en $(300,20)$

Por otra parte: $f''(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{1000}<0 & \text{si} \quad 0<x<200 \\ \dfrac{1}{500}>0 & \text{si} \quad 200<x\le 300 \end{cases}$

	$(0,200)$	$(200,300)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\searrow$	cóncava $\smile$

La función es convexa "$\frown$" en el intervalo $(0,200)$ y cóncava "$\smile$" en el $(200,300)$. La función cambia de curvatura en el $(200,30)$ punto de inflexión. Con estos datos representamos gráficamente:



El tiempo máximo corresponde a un trabajador sin ninguna experiencia con 50 horas, mientras que tiempo mínimo corresponde a un trabajador con 300 horas de experiencia y tardaría 20 horas.

Problema 4 Dada la función $f(x)=-x^2-2x+3$, se pide:

a) (0,5 puntos) Encontrar la primitiva F de f verificando $F(1)=1$.

b) (2 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x=-2$ y $x=2$.

Solución:

a) $F(x) = \int (-x^2 - 2x + 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$

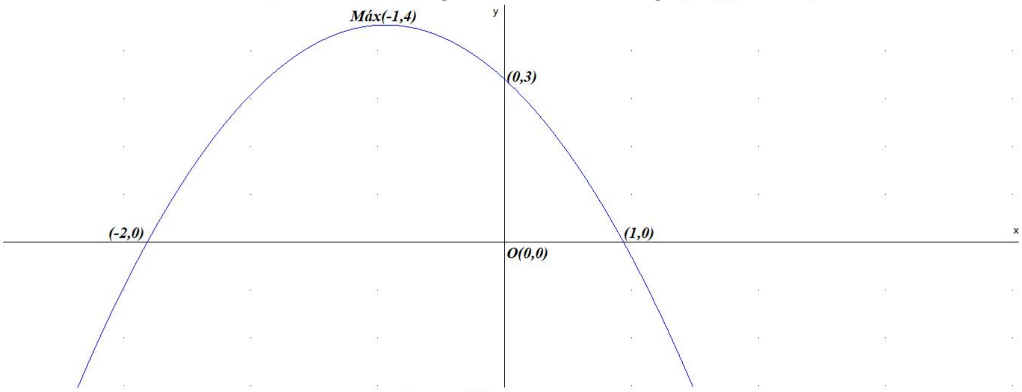
$F(1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + C = 1 \Longrightarrow C = -\frac{2}{3} \Longrightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}$

b) La función tiene $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ con puntos de corte en:

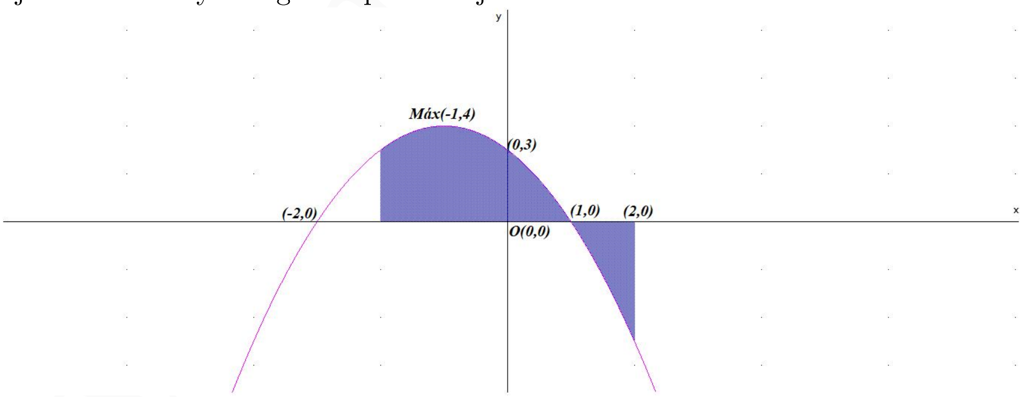
- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 3)$
- Con OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Longrightarrow (-3, 0)$ y $(1, 0)$

$f'(x) = -2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ Se trata de un máximo en $(-1, 4)$.
$f''(x) = -2 < 0 \Longrightarrow \frown$ la función es convexa en todo el dominio y no tiene puntos de inflexión.
Asíntotas: No tiene asíntotas

Con estos datos la representación gráfica sería la siguiente:



La función tiene un punto de corte con el eje de abscisas en $x = 1 \in [-2, 2]$. Habrá dos recintos de integración $S_1 : [-2, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$. El primero está por encima del eje de abscisas y el segundo por debajo:



$$S_1 = \int_{-2}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big]_{-2}^{1} = 9$$

$$S_2 = \int_{1}^{2} (-x^2 - 2x + 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \Big]_{1}^{2} = -\frac{7}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3} \simeq 11,3333\ u^2$$