Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2025

Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-6}{2-x}$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.

c) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.
Como cociente de polinomios la función es continua y derivable en todos los puntos reales salvo los que anula el denominador, es decir la función es continua y derivable en todo el dominio de la función $\mathbb{R} - \{2\}$.
Asíntotas:

- ☛ Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-6}{2-x} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-6}{2-x} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

- ☛ Horizontales: $y = -2$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-6}{2-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-6}{2-x} = -2$$

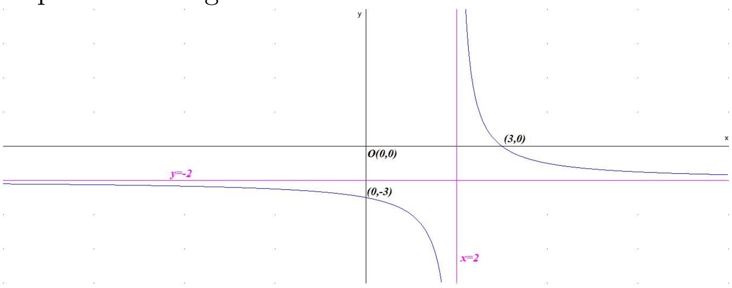
- ☛ Oblícuas: no hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2} < 0 \Longrightarrow f$ es siempre decreciente en $\mathbb{R} - \{2\}$. Como $f'(x) \neq 0 \Longrightarrow$ la función no tiene extremos relativos.

c) Puntos de corte:

- ☛ Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$
- ☛ Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow (3, 0)$

Representación gráfica:



Problema 2 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x+3 & \text{si} \quad x < 4 \\ 2x-5 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) (0,75 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) (0,75 puntos) Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.

c) (1 punto) Represente la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas. Calcule su área.

Solución:

a) Las dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 4$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(-x^2+4x+3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}(2x-5) = 3 \\ f(4) = 3 \end{cases} \xRightarrow{\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 3}$$

f es continua en $x = 4 \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$

Las dos ramas de la función son polinomios y, por tanto, derivables. Hay que estudiar la derivabilidad en $x = 4$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x < 4 \\ 2 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(4^-) = -4 \\ f'(4^+) = 2 \end{cases} \xRightarrow{f'(4^-) \neq f'(4^+)}$$

f no es derivable en $x = 4 \Longrightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$

b) $f'(x) = \begin{cases} -2x+4 = 0 \Longrightarrow x = 2 & \text{si} \quad x < 4 \\ 2 \neq 0 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

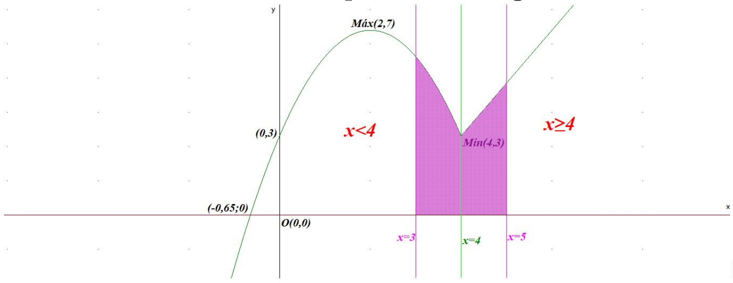
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ y decreciente en el $(2, 4)$. Tiene un máximo relativo en el punto $(2, 7)$ y un mínimo relativo en el $(4, 3)$.

c) Calculamos los puntos de corte:

- ☛ Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 3)$
- ☛ Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lll} -x^2 + 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -0,65;\;\; 4,65 \text{ no válida} & \text{si} & x < 4 \\ 2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 2,5 \text{ no válida} & \text{si} & x \geq 4 \end{array}\right. \Longrightarrow (-0,65; 0)$$

Con los datos anteriores representamos gráficamente:



El área será:

$$S = \int_3^4 (-x^2+4x+3)\,dx + \int_4^5 (2x-5)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right)\Big]_3^4 + \left(x^2 - 5x\right)\Big]_4^5 =$$

$$\frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \simeq 8,6667\ u^2$$

Problema 3 El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0, 62]$ el número de años transcurridos desde 1.932. Se pide:

a) (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b) (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c) (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

Solución:

a) $IPR'(t) = -3t^2 + 108t + 480 = 0 \Longrightarrow t = 40$ y $t = -4$ (no válida)

	$(0, 40)$	$(40, 62)$
$IPR'(t)$	$+$	$-$
$IPR(t)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, 40)$ años (1932,1972) y decreciente en el $(40, 62)$ años (1972,1994). Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $t = 40$ años (en 1972).

b) Tenemos: $IPR(0) = 6000$, $IPR(40) = 47600$ y $IPR(62) = 5008$. Al máximo absoluto se llega a los 40 años con un índice de 47600 (en 1972) y al mínimo absoluto se llega a los 62 años con 5008 (en 1994).

c) $IPR''(t) = -6t + 108 = 0 \Longrightarrow t = 18$.

	$(0,18)$	$(18,62)$
$IPR''(t)$	$+$	$-$
$IPR(t)$	cóncava $\smile$	covexa $\frown$

La función es cóncava en el intervalo $(0,18)$ $\smile$ de $(1932,1950)$ y convexa en el $(18,62)$ $\frown$ de $(1950,1994)$ con un punto de inflexión en $t = 18$ años (en 1950) con un $IPR(18) = 26304$

Problema 4 sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$.

b) (3 puntos) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) (4 puntos) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solución:

a) En la rama $x < 2$ la función es siempre continua. El punto que anula el denominador es $x = 2$ y no pertenece a la rama.
En la rama $x > 2$ la función es siempre continua. Si $x > 2 \Longrightarrow x^2 - 2x > 0$.
Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x - \sqrt{x^2-2x}) = 2 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

En $x = 2$ hay una discontinuidad no evitable con un salto infinito.
La función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2-x}\,dx = -\ln|2-x|\big]_0^1 = -(0 - \ln 2) = \ln 2$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x^2-2x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-2x})(x + \sqrt{x^2-2x})}{x + \sqrt{x^2-2x}} =$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - (x^2-2x)}{x + \sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2-2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} =$
1