Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2025

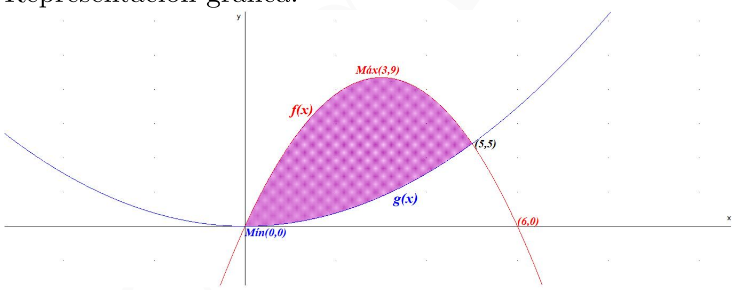
Problema 1 La superficie de ampliación de un parque de atracciones, en decámetros cuadrados, coincide con el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{5}$

a) (1 punto) Represente gráficamente la superficie de ampliación del parque de atracciones.

b) (1,5 puntos) Si el coste para acondicionar el nuevo suelo es de 75 €/m^2, calcule el área de ampliación del parque y el coste total del acondicionamiento.

Solución:

a)
- ☛ la función f es una parábola que corta a los ejes coordenados en los puntos $(0,0)$ y $(6,0)$. Tenemos $f'(x) = -2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 3$ y como $f''(x) = -2 \Longrightarrow f'(3) = -2 < 0 \Longrightarrow (3,9)$ es un máximo relativo.
- ☛ la función g es una parábola que corta a los ejes coordenados en el punto $(0,0)$. Tenemos $f'(x) = \dfrac{2x}{5} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un mínimo relativo.
- ☛ Los puntos de corte de las dos gráficas: $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + 6x = \dfrac{x^2}{5} \Longrightarrow 6x(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 5$. Los puntos son $(0,0)$ y $(5,5)$
- ☛ Representación gráfica:



b) El recinto de integración es $S_1 : [0,5]$ de $f(x) - g(x)$. El resultado de la integral será positiva al estar f por encima de g en ese intervalo.

$$S_1 = \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^5 \left(-x^2 + 6x - \frac{x^2}{5}\right) dx = \int_0^5 \left(6x - \frac{6x^2}{5}\right) dx =$$

$$3x^2 - \frac{2x^3}{5}\Big]_0^5 = 25 \Longrightarrow S = |S_1| = 25 \text{ Dm}^2$$

$S = 2500$ m$^2 \Longrightarrow$ Coste$= 2500 \cdot 75 = 187500$ €.

Problema 2 Se consideran las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = 1 \text{ si } \; -1 \le x \le 3$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f y g en sus dominios.

b) (1,5 puntos) Represente el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcule su área.

Solución:

a)

- ☛ La función g es continua en $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$ por ser una función constante.
- ☛ Continuidad de f: Las ramas de la función son polinomios y, por tanto, continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x=1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2-x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-2)^2 = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \xRightarrow{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)}$$

f es continua en $x=1$ y por tanto en $[-1,3]$.

- ☛ Derivabilidad de f: Las ramas son polinomios y, por tanto, derivables en $(-1,1)\cup(1,3)$. Hay que estudiar la derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2(x-2) & \text{si} \quad 1 < x < 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 \\ f‘(1^+) = -2 \end{cases} \xRightarrow{f'(1^-) = f'(1^+) = -2}$$

f es derivable en $x=1 \Longrightarrow f$ es derivable en $(-1,3)$

b)

- ☛ La función f corta a los ejes en $(2,0)$, $(0,2)$ y pasa por el $(1,1)$, tiene un máximo relativo en $(0,2)$ y un mínimo relativo en $(2,0)$.
- ☛ la función g es una recta horizontal $y=1$.
- ☛ Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ (x-2)^2 = 1 \Longrightarrow x = 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \end{cases} \Longrightarrow$$

Hay dos recintos de integración $S_1 : [-1,1]$ y $S_2 : [1,3]$ las gráficas de la función cambian de posición de un intervalo a otro.

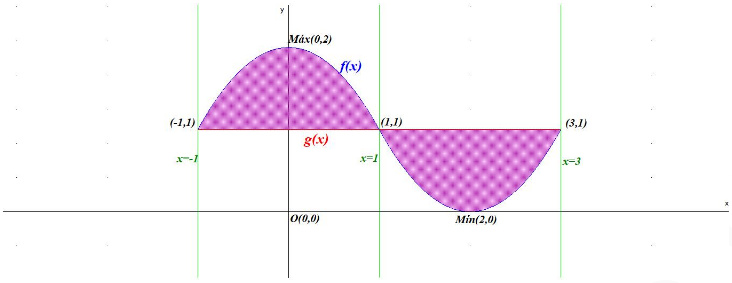
$$S_1 = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\bigg]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

(La función f está por encima de g)

$$S_2 = \int_1^3 ((x-2)^2 - 1)\, dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3} - x\right]_1^3 = -\frac{4}{3}$$

(La función f está por debajo de g)

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \simeq 2,6667\ u^2$$



Problema 3 Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50,\ \ 0 \le x \le 8$.

a) (4 puntos) Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$ cuando $x \in [0, 8]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b) (3 puntos) ¿$f(x)$ tiene algún punto de inflexión? Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$.

c) (3 puntos) Calcule $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 40 > 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos, la función es siempre creciente. Tenemos $f(0) = 50 \Longrightarrow$ hay un mínimo absoluto en $(0, 50)$ y $f(8) = 306 \Longrightarrow$ hay un máximo absoluto en $(8, 306)$

b) $f''(x) = 6x - 18 = 0 \Longrightarrow x = 3$ como $f'''(x) = 6 \Longrightarrow f'''(3) = 6 \neq 0 \Longrightarrow x = 3$ es un punto de inflexión $(3, 116)$.

	$(0,3)$	$(3,8)$
$f''(t)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo (0,3) y cóncava $\smile$ en el $(3, 8)$

c)

$$\int_1^3 (x^3 - 9x^2 + 40x + 50)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x\right]_1^3 = \frac{1077}{4} - \frac{269}{4} = 202$$

Problema 4 La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \dfrac{100t}{10 + 2t}$ €, siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a) (3 puntos) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b) (4 puntos) Calcule $V'(t)$ y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a) para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$ sea igual a 125 €.

c) (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175 €?

Solución:

a) $V(0) = 200$ € en su valor inicial y en un horizonte infinito $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \left(200 - \dfrac{100t}{10 + 2t}\right) = 200 - 50 = 150$ €

b) $V'(t) = -\dfrac{250}{(t+5)^2} < 0 \Longrightarrow V(t)$ es decreciente en todo el dominio de la función.
Por el apartado anterior la función decrecerá infinitamente pero no llegará a los 125 €.

c) $V(t) = 200 - \dfrac{100t}{10 + 2t} = 175 \Longrightarrow \dfrac{100t}{10 + 2t} = 25 \Longrightarrow t = 5$ años