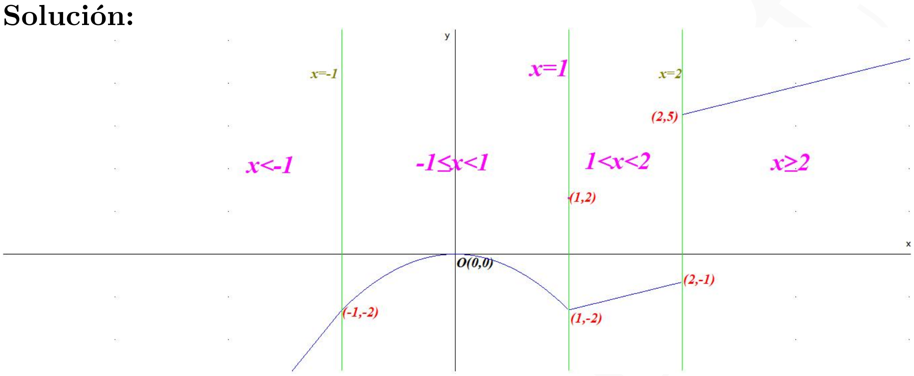
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2025

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 5x+3 & \text{si} & x < -1 \\ -2x^2 & \text{si} & -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} & x = 1 \\ x-3 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ x+3 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua, en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} ax^2 - bx + 3 & \text{si} & x < 1 \\ x^2 + bx - 2a & \text{si} & x \ge 1 \end{array} \right.$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - bx + 3) = a - b + 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (x^2 + bx - 2a) = 1 + b - 2a$$

$$a - b + 3 = 1 + b - 2a \Longrightarrow 3a - 2b = -2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 2a - b; \;\; f'(1^+) = 2 + b \Longrightarrow 2a - b = 2 + b \Longrightarrow 2a - 2b = 2$$

$$\begin{cases} 3a - 2b = -2 \\ 2a - 2b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2a}{3} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x - a & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{bx - 1}{2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1} \dfrac{x - 2a}{3} = \dfrac{-1 - 2a}{3} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (2x - a) = -2 - a \end{cases} \Longrightarrow \frac{-1 - 2a}{3} = -2 - a \Longrightarrow a = -5$$

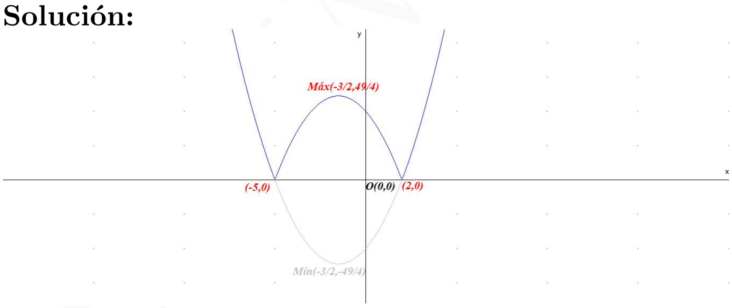
Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2x - a) = 2 - a \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{bx - 1}{2} = \dfrac{b - 1}{2} \end{cases} \Longrightarrow 2 - a = \frac{b - 1}{2} \Longrightarrow 2a + b = 5$$

$$\begin{cases} a = -5 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 15 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:



Hacemos $g(x) = x^2 + 3x - 10 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3/2$:

x	y
0	-10
-5	0
2	0
$-3/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{49}{4}\right)$.
La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} x^2 + 3x - 10 & \text{si} & x \le -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si} & -5 < x \le 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -5$:

$$\lim_{x \longrightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -5} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

y f es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lcc} 2x + 3 & \text{si} & x < -5 \\ -2x - 3 & \text{si} & -5 < x < 2 \\ 2x + 3 & \text{si} & 2 < x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -5$: $f'(-5^-) = -7$ y $f'(-5^+) = 7$, luego no es derivable en $x = -5$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -7$ y $f'(2^+) = 7$, luego no es derivable en $x = 2$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$.

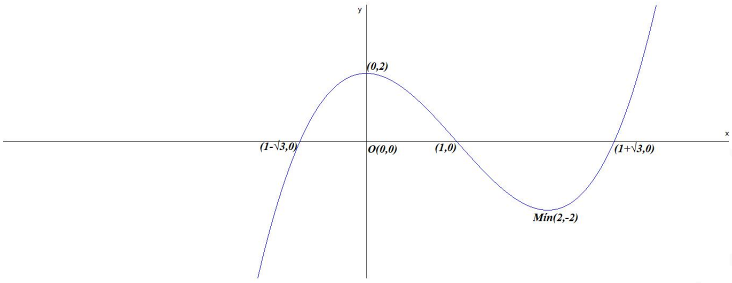
Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - ax^2 + 4bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, -2)$.

Decidir de que extremo se trata.
Solución:

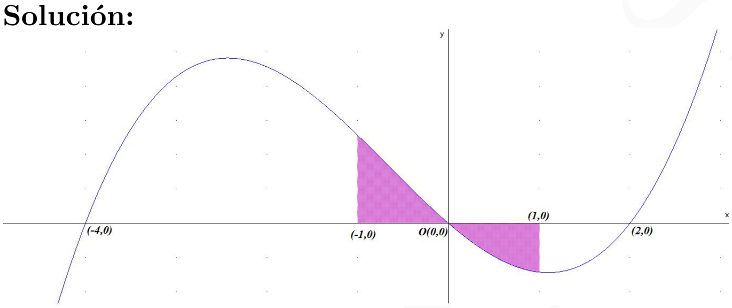
$$f(x) = x^3 - ax^2 + 4bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 2ax + 4b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(2) = -2 \Longrightarrow 8 - 4a + 8b + c = -2 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 4a + 4b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
$f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow f''(2) = 6 > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.



Problema 6 Dada la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:



$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = -4, \;\; x = 2 \text{ y } x = 0$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 + 2x^2 - 8x)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 4x^2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = \frac{53}{12}, \;\; S_2 = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{37}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{53}{12} + \frac{37}{12} = \frac{15}{2} \simeq 7,5\; u^2$$