Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Enero 2025

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 3$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - x + 1 \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de corte con el eje de abscisas.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -1 \Longrightarrow (0, -1)$.

c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ la función no es par ni impar.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x\right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

f) $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 2$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en el $(0, 1) \cup (1, 2)$ con un máximo relativo en $(0, -1)$ y un mínimo relativo en $(2, 3)$.

g)

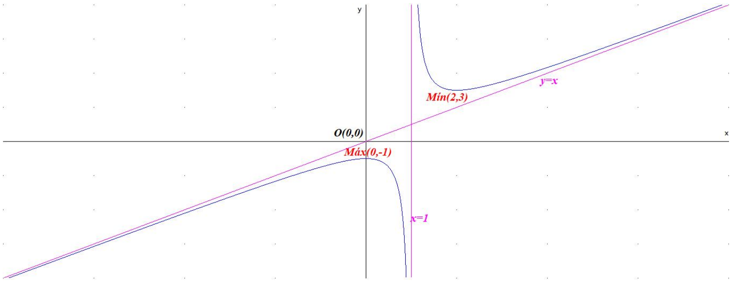
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión.

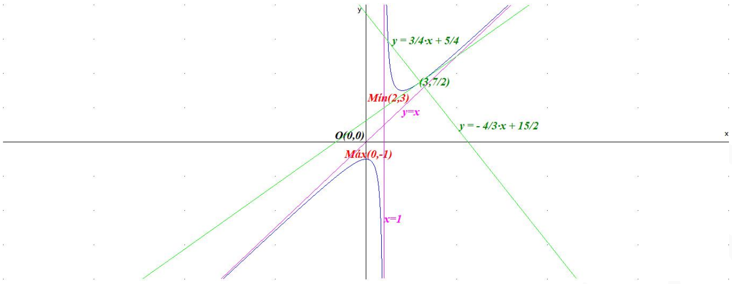
	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

Cóncava: $(1, \infty)$
Convexa: $(-\infty, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:



Como $m = f'(3) = 3/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{7}{2} = \frac{3}{4}(x-3) \Longrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{7}{2} = -\frac{4}{3}(x-3) \Longrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{15}{2}$$

Como $f(3) = 7/2$ las rectas pasan por el punto $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.