Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Sean las matrices
$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

a) (1,25 puntos) Si $\frac{1}{3}(A + B\cdot C)\cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) (1,25 puntos) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Solución:

a) $\frac{1}{3}(A + B\cdot C)\cdot D = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3m \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 3m \end{cases}$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 3 \\ m & 4 & 3m \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 4 - m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $m = -2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado(el sistema tiene infinitas soluciones)
- Si $m = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado(el sistema tiene infinitas soluciones)

c) Si $m = 1$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Determine todos los valores de los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $A^2 = O$, donde O denota la matriz nula de tamaño 2×2.

b) (1,25 puntos) Sea $a = 2$ y $b = -2$. Sabiendo que $B = A + I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, calcule B^2 y B^{10}.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -1 \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-4 & -a-b \\ 4a+4b & b^2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a^2-4=0 \Longrightarrow a=\pm 2 \\ -a-b=0 \Longrightarrow a=-b \\ 4a+4b=0 \Longrightarrow a=-b \\ b^2-4=0 \Longrightarrow b=\pm 2 \end{cases} \xrightarrow{a=-b} \begin{cases} a=2 \text{ y } b=-2 \\ a=-2 \text{ y } b=2 \end{cases}$$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B^3 = B{\cdot}B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}, \ldots, B^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & 1-2n \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$B^{10} = \begin{pmatrix} 21 & -10 \\ 40 & -19 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* De cada 100 libros prestados en una biblioteca, 90 son novelas, biografías y libros de autoayuda. Además, se observa que los libros de autoayuda prestados son la mitad de las novelas y el número de las biografías es 5 unidades menor que el de las novelas. Plantee el sistema de ecuaciones y calcule el porcentaje de libros prestados de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de novelas, y de biografías y z de autoayudas.

$$\begin{cases} x+y+z=90 \\ z=\dfrac{x}{2} \\ y+5=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=90 \\ x-2z=0 \\ x-y=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=38\,\% \\ y=33\,\% \\ z=19\,\% \end{cases}$$

Se han prestado 38 % novelas, 33 % biografías y 19 % autoayudas.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & -2 & -1 & -85 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 90 \\ 0 & -1 & -3 & -90 \\ 0 & 0 & 5 & 95 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 5z=95 \Longrightarrow z=19 \\ -y-57=-90 \Longrightarrow y=33 \\ x+33+19=90 \Longrightarrow x=38 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=38\,\% \\ y=33\,\% \\ z=19\,\% \end{cases}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x-2y+(a+1)z=1 \\ 2x-az=2 \\ (a+2)x-ay=4 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & a+1 & 1 \\ 2 & 0 & -a & 2 \\ a+2 & -a & 0 & 4 \end{array}\right); \quad |A| = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 2$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x + y = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -4 \end{array}\right.$$