Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (1,25 puntos) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $AX + 3B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X.

b) (1,25 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?

Solución:

a) $\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{m\times n}{X} + 3\underset{2\times 3}{B} = \underset{2\times 3}{C} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 3 \Longrightarrow \underset{2\times 3}{X}$

Como $|A| = -1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

$AX + 3B = C \Longrightarrow AX = C - 3B \Longrightarrow X = A^{-1}(C - 3B) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sean x las participaciones de 10 euros vendidas, y las de 25 euros y z las de 5 euros.

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ 10x + 25y + 5z = 7100 \\ x + y + z = 430 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 430 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + 5y + z = 1420 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 110 \\ y = 220 \\ z = 100 \end{cases} \Longrightarrow$$

una ganancia de $\begin{cases} 110 \cdot 2,50 = 275€ \\ 220 \cdot 5 = 1100€ \\ 100 \cdot 1 = 100€ \end{cases}$ en total $275 + 1100 + 100 = 1475€$

Resolvemos el sistema matricialmente:

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 430 \\ 0 \\ 1420 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se consideran las matrices M, P y N dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \quad \text{y} \quad (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N$$

b) (1,25 puntos) Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Solución:

a) $M \cdot N = 2N \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2b-a \\ 2-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$\left[\begin{pmatrix} -a+2c & -b+2 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} -a-3b \\ -c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2c \\ -b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a-3b \\ -c-3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -2a-3b+2c \\ -b-c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Tenemos:

$$\begin{cases} 2b - a = -2 \\ 2 - c = 4 \\ -2a - 3b + 2c = -1 \\ -b - c - 1 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

b) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$M + 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Luego $M^2 = M + 2I$.

$M^2 = M + 2I \Longrightarrow M^2 - M = 2I \Longrightarrow \frac{1}{2}M(M - I) = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) =$

$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$M^3 = MM^2 = M(M+2I) = M^2 + 2M = M + 2I + 2M = 3M + 2I =$
$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Solución:
Sean x el número de guitarras, y de pianos y z de violines.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ y+z=x \\ z+2y+4x=180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x-y-z=0 \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=35 \\ y=5 \\ z=30 \end{array}\right.$$

Tienen 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

Por Gauss:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & 0 & -1 & -30 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=30 \\ -2y-60=-70 \Longrightarrow y=5 \\ x+5+30=70 \Longrightarrow x=35 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=35 \\ y=5 \\ z=30 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:
$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=3$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 7a - 21 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{3\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ -y - 7z = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 7\lambda \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}\right.$$