Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$

Solución:
$A^2 \cdot X + A^4 = A \Longrightarrow A^2(X + A^2) = A \Longrightarrow A(X + A^2) = I \Longrightarrow X + A^2 = A^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1} - A^2 =$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Calcule $A \cdot B$ y $A^3 \cdot B$.

b) (1,25 puntos) Determine el valor del determinante de la matriz $A - 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - 2I| = 0$ ya que la matriz tiene dos filas iguales.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

Solución:

Sean x la cantidad percibida por Alba, y la cantidad percibida por Benito y z la cantidad percibida por Charo.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=6200 \\ x-200=y+z \\ x-600=y+600 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=6200 \\ x-y-z=200 \\ x-y=1200 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3200\,€ \\ y=2000\,€ \\ z=1000\,€ \end{array}\right.$$

Alba recibe 3200 €, Benito 2000 € y Charo 1000 €

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 1 & -1 & -1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 1200 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & -2 & -1 & -5000 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=1000 \\ -2y-2000=-6000 \Longrightarrow y=2000 \\ x+2000+1000=6200 \Longrightarrow x=3200 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3200 \\ y=2000 \\ z=1000 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+az=2 \\ x+y+z=a \\ -2x+2ay+8z=-13 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & 2a & 8 & -13 \end{array}\right); \quad |A|=2(a^2-1)=0 \Longrightarrow a=\pm 1$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{\pm 1\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=-1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3+2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -13 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -9 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 8z = -13 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \\ z = -2 \end{array}\right.$$