Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1,25 puntos) Halle la matriz A que satisface la ecuación $P^{-1} \cdot A \cdot P = J$.

b) (1,25 punto) Compruebe que $A^3 = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$

Solución:

a) $P^{-1} \cdot A \cdot P = J \Longrightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1} =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = (P \cdot J \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot J \cdot P^{-1}) = P \cdot J^2 \cdot P^{-1}$
$A^3 = A^2 \cdot A = (P \cdot J^2 \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot J \cdot P^{-1}) = P \cdot J^3 \cdot P^{-1}$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.

b) (1,25 puntos) Para $a = -2$ calcule A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = -a^3 + a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = -1$, $a = 0$ y $a = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1} \;\; \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$

b) Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de entradas generales, y de estudiantes y z las de infantiles.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4900 \\ x-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=200 \\ y=300 \\ z=100 \end{array}\right.$$

Se venden 200 entradas generales, 300 de estudiantes y 100 infantiles.

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & 4900 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-10F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=100 \\ -y-300=-600 \Longrightarrow y=300 \\ x+300+100=600 \Longrightarrow x=200 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=200 \\ y=300 \\ z=100 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=a \\ x+ay+z=a+1 \\ x+y+az=2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right); \quad |A|=2a(a-1)=0 \Longrightarrow a=0, \ \ a=1$$

- Si $a \in \mathbb{R}-\{0,1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2-F_1 \\ 2F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}\right.$$