Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2024

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

b) (1,5 puntos) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+2 \\ a+c+2 \\ c^2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c+2=6 \\ c^2+5=6c \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a=3 \text{ y } c=1 \\ a=-1 \text{ y } c=5 \end{cases}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B , C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.

Solución:

Sean x el número de piezas de A, y las de B y z las de C.

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ x+y=4z \\ x+2y+4z=100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=50 \\ x+y-4z=0 \\ x+2y+4z=100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=20 \\ z=10 \end{cases}$$

Hay 20 piezas de A, 20 de B y 10 de C.

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 100 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & -5 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 50 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5z=-50\Longrightarrow z=10 \\ y+30=50\Longrightarrow y=20 \\ x+20+10=50\Longrightarrow x=20 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=20 \\ y=20 \\ z=10 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2x-ay=a \\ a^3x-y=1 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} a^2 & -a & a \\ a^3 & -1 & 1 \end{array}\right);\quad |A|=a^2(a^2-1)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=\pm 1$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-2y=2 \\ 8x-y=1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) (1,25 punto) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) (1,25 punto) Calcular la inversa de A para $x = 0$.

Solución:

a) $|A| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \exists A^{-1} \; \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

b) Si $x = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$