

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2024

Problema 1 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \implies \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX - X = B - 2CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - X + 2CX = B \implies X = (A - I + 2C)^{-1}B$$

$$A - I + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I + 2C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/16 & -3/16 \\ 3/8 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/16 & -3/16 \\ 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I + 2C)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/16 & -3/16 \\ 3/8 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -9/16 \\ 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular el siguiente sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 2x + 3y - z = 12 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ 2x + 3y - z = 12 \\ 3x - y - 2z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 4 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular si es posible $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot B$ y $B \cdot A$

Solución:

$A \cdot A$ y $A \cdot B$ no se pueden multiplicar.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -8 \\ -1 & -6 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Problema 5 Laia, una aficionada a la artesanía elaborada con madera, montó un pequeño negocio hace un par de meses. En su taller, elabora tres tipos de productos con madera reciclada, que luego pone a la venta: nombres personalizados, palabras decorativas y peonzas. Durante el primer mes, Laia tuvo tres clientes: el primero adquirió 2 nombres personalizados y 3 peonzas; el segundo adquirió 1 nombre personalizado, 2 palabras decorativas y 5 peonzas, y el tercero solo compró 4 peonzas.

- a) (1,5 puntos) Construya la matriz 3×3 correspondiente a las ventas, en la que las filas representen a los clientes ($C1$, $C2$ y $C3$) y las columnas representen los productos que adquirieron. Si durante el primer mes Laia vendió los nombres personalizados (N) a 20€ cada uno, las palabras decorativas (P) a 18€ cada una y las peonzas (B) a 6€ cada una, calcule cuánto facturó a cada cliente por su pedido mediante un producto de matrices.
- b) (1 punto) Para incentivar las ventas, en el segundo mes Laia aplicó un descuento al precio de venta de todos los productos. Durante este mes, también tuvo tres clientes y obtuvo la siguiente matriz de ventas:

N	P	B	
3	1	2	$C1$
2	0	4	$C2$
1	2	3	$C3$

Si durante el segundo mes Laia facturó 78€ al primer cliente, 52€ al segundo cliente y 62€ al tercer cliente, ¿a qué precio vendió cada producto?

(Cataluña Ordinaria-Coincidente-2024)

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ y la venta será: $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 58 \\ 86 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

El primer cliente $C1$ pagó 58 €, el segundo $C2$ pagó 86 € y el tercero $C3$ pagó 24 €.

b) Ahora $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ con $|A| = -18 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, $B = \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 2 & -7 & 8 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 78 \\ 52 \\ 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Los nuevos precios serían: 18 € los nombres personalizados, 16 € las palabras decorativas y 4 € la peonza.