Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2024

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 3 & -1 \\ 2 & m+1 & 0 \\ m & -5 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.

b) Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & 3 & -1 \\ 2 & m+1 & 0 \\ m & -5 & 3 \end{vmatrix} = 4(m^2 + m - 2) = 0 \Longrightarrow m = -2, \quad m = 1$$

Si $m = -2$ o $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq -2$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/8 & 1/2 & -1/8 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 5/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$

Problema 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calcular A^n y en particular A^{2025}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A; \quad A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I$$

Luego $A^n = \begin{cases} A & \text{si} \quad n \text{ impar} \\ I & \text{si} \quad n \text{ par} \end{cases} \Longrightarrow A^{2025} = A$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a-b \\ c & -2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a = a - 2c \Longrightarrow c = 0 \\ b - 2d = -2a - b \Longrightarrow d = a + b \\ -c = c \Longrightarrow c = 0 \\ -d = -2c - d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$.

Problema 5 Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina constante mágica. Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

a) (1,25 puntos) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas).

b) (1,25 puntos) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí?

(Cataluña Ordinaria-2024)

Solución:

a) $D = 10 \cdot A + 3 \cdot B + 18 \cdot C = 10 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 41 & 3 \\ 11 & 18 & 25 \\ 33 & -5 & 26 \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} F_1 : 10 + 41 + 3 = 54 \\ F_2 : 11 + 18 + 25 = 54 \\ F_3 : 33 - 5 + 26 = 54 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} C_1 : 10 + 11 + 33 = 54 \\ C_2 : 41 + 18 - 5 = 54 \\ C_3 : 3 + 25 + 26 = 54 \end{cases} \Longrightarrow$$

D es una matriz mágica cuya constante es 54.

b) Sea a la edad de su padre, luego $D = 8 \cdot A + 9 \cdot B + a \cdot C =$

$$8 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 3a - 17 & 9 \\ a + 1 & a & a - 1 \\ 2a - 9 & 17 - a & 2a - 8 \end{pmatrix}$$

Luego $F_1 : 8 + 3a - 17 + 9 = 153 \Longrightarrow a = 51$ años son los que cumple el padre de Martí, y sustituyendo tenemos la matriz mágica:

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 136 & 9 \\ 52 & 51 & 50 \\ 93 & -34 & 94 \end{pmatrix}$$