Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Diciembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} 2x + ay + 4z = 2 \\ ax + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 2ay + 10z = a \end{cases} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 0$. (0,5 puntos)

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{array} \right); \quad |A| = 2(4 - a^2) = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- ☛ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- ☛ Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right)) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2 \\ 2y + 6z = 0 \\ 4x + 10z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2z = -4 \Longrightarrow z = -2 \\ 2y - 12 = 0 \Longrightarrow y = 6 \\ 2x - 8 = 2 \Longrightarrow x = 5 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

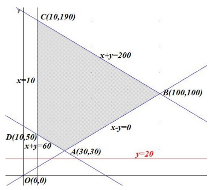
a) (2 puntos) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo?

b) (0,5 puntos) ¿Cuál es este gasto mínimo?

Solución:
Sea x : número de contenedores de cereales e y : número de contenedores de pienso.

a) La región factible es:

$$\left\{\begin{array}{l} x \le y \\ x + y \le 200 \\ x + y \ge 60 \\ y \ge 20 \\ x \ge 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \le 0 \\ x + y \le 200 \\ x + y \ge 60 \\ y \ge 20 \\ x \ge 10 \end{array}\right.$$

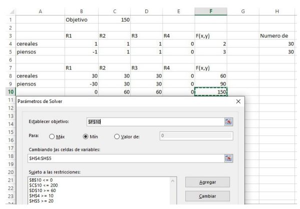


Los vértices son: $A(30,30)$, $B(100,100)$, $C(10,190)$ y $D(10,50)$

$f(x,y) = 2x + 3y$

$$\left\{\begin{array}{l} f(30,30) = 150 \text{ Mínimo} \\ f(100,100) = 500 \\ f(10,190) = 590 \\ f(10,50) = 170 \end{array}\right.$$

Solución por solver :



b) Se deben almacenar 30 contenedores de cereales y 30 de piensos con un gasto mínimo de 150€.