Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (2, 1, 3)$.

a) (1,25 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

b) (1,25 puntos) Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$ y que contiene al punto $Q = (1, 0, 1)$.

Solución:

a) Se trata de un plano mediador, un punto de él $P(x, y, z)$ tiene que cumplir: $d(A, P) = d(B, P) \Longrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} \Longrightarrow$$

$$\pi : 4x + 4y + 4z - 12 = 0 \Longrightarrow \pi' : x + y + z - 3 = 0$$

b) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi'}} = (1, 1, 1) \\ P_r = Q(1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \Longrightarrow x - 1 = y = z - 1$$

Problema 2 (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$, y $D = (-1, 0, 1)$,

a) (0,75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

b) (0,75 puntos) Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

c) (1 punto) Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (1, 1, 1) = (0, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 3) - (1, 1, 1) = (-2, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-2, 0, 0)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$$

Los cuatro puntos no son coplanarios.

b) $\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,0,2)\\ A=(1,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{array}\right|=-2(x+y+z-3)=0\Longrightarrow$

$$\pi: x+y+z-3=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,1)\\ P_r=D(-1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

c) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow (-1+\lambda)+\lambda+(1+\lambda)-3=0 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow P(0,1,2)$

Problema 3 (2,5 puntos) Hallar el punto simétrico del punto $P=(1,0,-1)$ respecto de la recta $r: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$

Solución:

$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,2)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2\lambda\end{array}\right.$

Seguimos el siguiente método:

- Calculamos un plano $\pi\perp r$ tal que $P\in r$:
  $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(1,2,2)\Longrightarrow \pi: x+2y+2z+A=0 \xrightarrow{P\in r} 1+0-2+A=0 \Longrightarrow A=1\Longrightarrow$
  $\pi: x+2y+2z+1=0$
- Calculamos el punto de corte P' de r con π:
  $1+\lambda+2(2\lambda)+2(2\lambda)+1=0\Longrightarrow \lambda)=-\dfrac{2}{9}\Longrightarrow P'\left(\dfrac{7}{9},-\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{9}\right)$
- El punto P' es el punto medio entre P y el que buscamos P'':
  $\dfrac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=\left(\dfrac{14}{9},-\dfrac{8}{9},-\dfrac{8}{9}\right)-(1,0,-1)=\left(\dfrac{5}{9},-\dfrac{8}{9},\dfrac{1}{9}\right)$

Problema 4 (2,5 puntos)

a) (1,25 punto) Determinar los valores del parametro $k\in\mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=kt\\ z=k-2t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R},\quad r_2:\left\{\begin{array}{l}x+2y+2z=-1\\ x+y+z=k\end{array}\right.$$

Son paralelas.

b) (1,25 punto) Para $k=2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan.

Solución:

a) $r_1:\begin{cases} x=1\\ y=kt\\ z=k-2t\end{cases} \Longrightarrow r_1:\begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}}=(0,k,-2)\\ P_{r_1}(1,0,k)\end{cases}$

$r_2:\begin{cases} x+2y+2z=-1\\ x+y+z=k\end{cases} \Longrightarrow r_2:\begin{cases} x=1+2k\\ y=-1-k-\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \Longrightarrow r_2:\begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}}=(0,-1,1)\\ P_{r_2}(1+2k,-1-k,0)\end{cases}$

$r_1 \parallel r_2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r_1}} = a\overrightarrow{u_{r_2}} \Longrightarrow a(0,k,-2) = (0,-1,1) \Longrightarrow \begin{cases} ak=-1\\ -2a=1\end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}\\ k=2\end{cases}$

Las rectas o son paralelas o coincidentes. Para $k=2 \Longrightarrow P_{r_1}(1,0,2)$ lo sustituimos en $r_2:\begin{cases} x+2y+2z=-1\\ x+y+z=2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1+0+4\neq -1\\ 1+0+2\neq 2\end{cases} \Longrightarrow P_{r_1}\notin r_2 \Longrightarrow r_1\parallel r_2$

b) Para $k=2$ las rectas son paralelas y se puede calcular un plano π que las contenga:

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}}=(0,2,-2)\approx 2(0,1,-1)\\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(5,-3,0)-(1,0,2)=(4,-3,-2)\\ P_{r_1}(1,0,2)\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2\\ 0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & -2\end{vmatrix} = -5x-4y-4z+13=0 \Longrightarrow \pi: 5x+4y+4z-13=0$$