Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Dado el punto $A = (0, -1, 1)$ y el plano $\pi : x + y + z + 3 = 0$.

a) (1,5 puntos) Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

b) (1 puntos) Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, $C = (-2, -3, 1)$ y el origen de coordenadas.

Solución:

a) Seguimos el siguiente método:

- Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:
$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ P_t = A(0, -1, 1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- Calculamos el punto A' de corte de t con π:
$\lambda + (-1 + \lambda) + (1 + \lambda) + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow A'(-1, -2, 0)$

- A' es el punto medio de A con B:
$$\frac{A + B}{2} = A' \Longrightarrow B = 2A' - A = (-2, -4, 0) - (0, -1, 1) = (-2, -3, -1)$$

$$B(-2, -3, -1)$$

b) $\overrightarrow{OA} = (0, -1, 1) - (0, 0, 0) = (0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{OC} = (-2, -3, 1) - (0, 0, 0) = (-2, -3, 1)$
$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}\right| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(2, -2, -2)| = \sqrt{3}\ u^2$$

Problema 2 (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$, $C = (-1, 1, 3)$ y $D = (-1, 0, 1)$.

a) (0,75 puntos) Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

b) (0.75 puntos) Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

c) (1 punto) Calcula el punto P intersección de $r \equiv x + 1 = -y = z - 1$ y $\pi \equiv x - y - z = 1$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1,0,2) - (1,1,1) = (0,-1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1,0,1) - (1,1,1) = (-2,-1,0)$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Los cuatro puntos no son coplanarios.

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,2) = 2(-1,0,1) \\ A(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x-y-z+3 = 0 \Longrightarrow \pi : x+y+z-3 = 0$

$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1) \\ P_r(-1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(-1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

sustituimos en $\pi : x-y-z-1 = 0 \Longrightarrow (-1+\lambda) - (-\lambda) - (1+\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow P(2,-3,4)$

Problema 3 (2,5 puntos) Sean $A = (6,2,-1)$, $B = (3,0,5)$ y $C = (-2,1,2)$ los vértices de un triángulo.

a) (1,25 puntos) Calcule los ángulos internos del triángulo.

b) (1,25 puntos) Calcule el área del triángulo.

Solución:

a) Ámgulos:

- ☛ Ángulo con vértice en $\hat{A}$:
  Sean $\overrightarrow{AB} = (3,0,5) - (6,2,-1) = (-3,-2,6)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2,1,2) - (6,2,-1) = (-8,-1,3)$

  $$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-3,-2,6)\cdot(-8,-1,3)}{\sqrt{9+4+36}\cdot\sqrt{64+1+9}} = \frac{24+2+18}{7\cdot\sqrt{74}} = \frac{44}{7\cdot\sqrt{74}} \Longrightarrow$$

  $$\hat{A} = 43^\circ 3' 18''$$

- ☛ Ángulo con vértice en $\hat{B}$:
  Sean $\overrightarrow{BA} = (6,2,-1) - (3,0,5) = (3,2,-6)$ y $\overrightarrow{BC} = (-2,1,2) - (3,0,5) = (-5,1,-3)$

  $$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{(3,2,-6)\cdot(-5,1,-3)}{\sqrt{9+4+36}\cdot\sqrt{25+1+9}} = \frac{-15+2+18}{7\cdot\sqrt{35}} = \frac{5}{7\cdot\sqrt{35}} \Longrightarrow$$

  $$\hat{B} = 83^\circ 3' 55''$$

- ☛ $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 126°7'13'' = 53°52'47''$

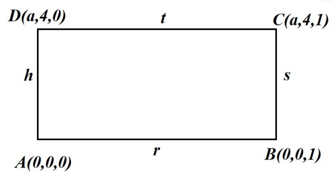
b) $S_t = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}| = \dfrac{1}{2}|-13(0,3,1)| = \dfrac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20,5548\ u^2$

Problema 4 (2,5 puntos) Sean $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,1)$, $C = (a,4,1)$ y $D = (a,4,0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

a) (1,25 puntos) Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.

b) (1,25 puntos) Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Solución:



a) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (0,0,1)$ y $\overrightarrow{AD} = (a,4,0)$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 4 & 0 \end{vmatrix}| = |(-4,a,0)| = \sqrt{16+a^2} = 5 \Longrightarrow 16+a^2 = 25 \Longrightarrow a = \pm 3$$

como $a \geq 0 \Longrightarrow a = 3$

b) Si $a = 3 \Longrightarrow A(0,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(3,4,1)$ y $D(3,4,0)$:

- ☛ $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (0,0,1) \\ P_r = A(0,0,0) \end{cases}$ $\quad r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

- ☛ $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BC} = (3,4,0) \\ P_s = B(0,0,1) \end{cases}$ $\quad s : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

- ☛ $t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{CD} = (0,0,-1) = -(0,0,1) \\ P_t = D(3,4,0) \end{cases}$ $\quad t : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

- ☛ $h : \begin{cases} \overrightarrow{u_h} = \overrightarrow{DA} = (-3,-4,0) = -(3,4,0) \\ P_h = A(0,0,0) \end{cases}$ $\quad h : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 4\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$