Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudia la posición relativa de π y r.

b) (1,5 puntos) Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, 1)$ y $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, 1, 0) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases}$

a) Sustituimos r en $\pi : (1 + 2\lambda) - 2\lambda + 1 = 2 \Longrightarrow 2 = 2 \Longrightarrow r \subset \pi$

Se puede comprobar que $P_r \in \pi \Longrightarrow 1 - 0 + 1 - 2 = 0 \Longrightarrow P_r \in \pi$ y que $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 1) = 2 - 2 + 0 = 0$

b) Tenemos $s \perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $s \subset \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi}$.

Luego $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, -5)$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -2, -5) \\ P_s = P(2, -1, -2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2 - 5\lambda \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

Solución:

$C \in OXZ \Longrightarrow C \in \{y = 0\} \Longrightarrow C(a, 0, b)$

$|\overrightarrow{AB}| = |(-4, 2, 0)| = 2\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{AC}| = |(a, 0, b) - (4, 0, 0)| = |(a - 4, 0, b)| = \sqrt{(a - 4)^2 + b^2}$

$|\overrightarrow{BC}| = |(a, 0, b) - (0, 2, 0)| = |(a, -2, b)| = \sqrt{a^2 + 4 + b^2}$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Longrightarrow (a - 4)^2 + b^2 = a^2 + 4 + b^2 \Longrightarrow a = \dfrac{3}{2}$

$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| \Longrightarrow a^2 + 4 + b^2 = 20$

$$\begin{cases} a^2 + 4 + b^2 = 20 \\ a = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2}, \ b = -\dfrac{\sqrt{55}}{2} \\ a = \dfrac{3}{2}, \ b = \dfrac{\sqrt{55}}{2} \end{cases}$$

Luego $C\left(\dfrac{3}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{55}}{2}\right)$ o $C\left(\dfrac{3}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{55}}{2}\right)$

Problema 3 (2,5 puntos) Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{array}\right.$ y además pasa por el punto $(3, 2, 1)$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3) = -3(0, 1, 1) \Longrightarrow \pi : y + z + \lambda = 0 \xrightarrow{P(3,2,1)\in\pi}$$
$$2 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3 \Longrightarrow \pi : y + z - 3 = 0$$

Problema 4 (2,5 puntos) Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos en el espacio y $\overrightarrow{v_1}$ el vector que va de A a B; $\overrightarrow{v_2}$ el vector que va de B a C y $\overrightarrow{v_3}$ el vector que va de C a A.

a) (1 punto) Estudia si los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

b) (1,5 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

Solución:

a) Tenemos:
$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (1, 0, -1) - (1, 2, 3) = (0, -2, -4)$
$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BC} = (2, 2, 2) - (1, 0, -1) = (1, 2, 3)$
$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{CA} = (1, 2, 3) - (2, 2, 2) = (-1, 0, 1)$
$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\} \text{ son linealmente dependientes.}$$
Uno de los vectores se podría poner como combinación lineal de los otros dos.

b) Tenemos $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -4)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$
$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(2, -4, 2)| = \frac{1}{2}|2(1, -2, 1)| = \sqrt{6}\ u^2$$