Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2025

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, -m, m)$ y $\overrightarrow{w} = (3, m, 2)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & -m & m \\ 3 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - 2m^2 + 11m - 8 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

a) Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 1, -m+3)$ y $\overrightarrow{v} = (3, m-1, 1)$ sean perpendiculares.

b) Encontrar un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (1, -1, 2)$ y a $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$ que tenga módulo 5.

c) Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 3, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (6, -1, -1)$ son perpendiculares.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3m + m - 1 - m + 3 = 0 \Longrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$

b)

$$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 0) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = 2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{5}{2\sqrt{2}}(-2, -2, 0) = \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6 - 3 - 3 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 1, 2)$. Calcular:

a) Volumen de paralelepípedo que determinan.

b) Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

c) Altura del paralelepípedo.

d) Volumen del tetraedro que determinan.

e) Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

f) Altura del tetraedro.

Solución:

a)

$$V_p = |\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}| = |-1| = 1\ u^3$$

b)

$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |(1, -3, 1)| = \sqrt{11}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{\frac{11}{6}}\ u$$

c)

$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{\sqrt{11}}{11}\ u$$

d)

$$V_t = \frac{1}{6}\ u^3$$

e)

$$S_t = \frac{\sqrt{11}}{2}\ u^2,\ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{11}{6}}\ u$$

f)

$$H_t = H_p = \sqrt{\frac{11}{11}}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-2, 0, -3)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(5, 6, 9)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Encontrar el 4º vértice D.

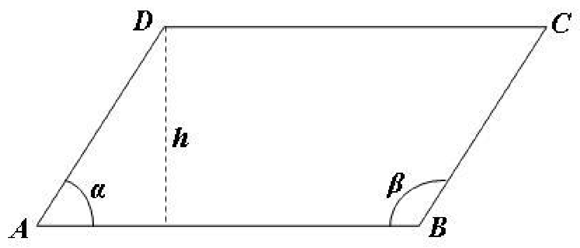
b) Calcular la longitud de sus lados.

c) Calcular sus ángulos y su centro.

d) Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

e) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-2, 0, -3) + (2, 5, 9) = (0, 5, 6)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(5, 1, 3)| = \sqrt{35}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2, 5, 9))| = \sqrt{110}$

c)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{42}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{110}} \Longrightarrow \alpha = 47^\circ 23' 56'' \text{ y } \beta = 132^\circ 36' 4''$$

El centro es $M\left(\frac{3}{2}, 3, 3\right)$

d) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (12, 12, 15)$

e)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(7, 6, 12) = \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-2, 0, -3) + \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right) = \left(\frac{1}{3}, 2, 1\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{3}, 2, 1\right) + \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right) = \left(\frac{8}{3}, 4, 5\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{8}{3}, 4, 5\right) + \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right) = (5, 6, 9)$$