Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1 (2,5 puntos) Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.

b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ.

c) (1 punto) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $(A^tA)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$, según los valores de a.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|AB| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists (AB)^{-1} \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

No existe ningún valor de λ que anule el determinante de AB luego no existe ningún valor de λ con el que no exista la inversa de AB.

b) $BA = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$

$|BA| = 0$ y $\begin{vmatrix} \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(BA) = 2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) Si $\lambda = 1$ tenemos:

$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$

$\overline{A^tA} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2a - a^2 \end{array}\right) =$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-a^2 \end{array}\right)$$
$2a-a^2 = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$.

- ☛ $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Longrightarrow 2a - a^2 \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

- ☛ Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow 2a - a^2 = 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

Pregunta 2 (2,5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

Solución:

Sean x el número de litros de la garrafa grande, y el número de litros de la garrafa mediana y z el número de litros de la garrafa pequeña.

$$\left\{\begin{array}{c} 6z+2 = y+x \\ 2x = 2y+z+1 \\ 14z+6y = 5y+5x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-6z = 2 \\ 2x-2y-z = 1 \\ 5x-y-14z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 37 \text{ L garrafa grande} \\ y = 31 \text{ L garrafa mediana} \\ z = 11 \text{ L garrafa pequeña} \end{array}\right.$$

La garrafa grande es de 37 L, la garrafa mediana es de 31 L y la garrafa pequeña es de 11 L. El aljibe contiene $5x + 5y = 5(x + y) = 5 \cdot 68 = 340$ L.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -14 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & 11 & -3 \\ 0 & -6 & 16 & -10 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-3F_2 \end{array}\right] =$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -z = -11 \Longrightarrow z = 11 \\ -4y+121 = -3 \Longrightarrow y = 31 \\ x+31-66 = 2 \Longrightarrow x = 37 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 37 \\ y = 31 \\ z = 11 \end{array}\right.$$

Bloque 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} x^2-6x+11 & \text{si} & x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si} & x \geq 2 \end{array}\right.$.

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1, 3)$.

c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en sus dominios, cuando $x < 2$ es un polinomio y cuando $x \geq 2$ el polinomio $5x-1$ es siempre positivo y la raíz siempre existe y es continua. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

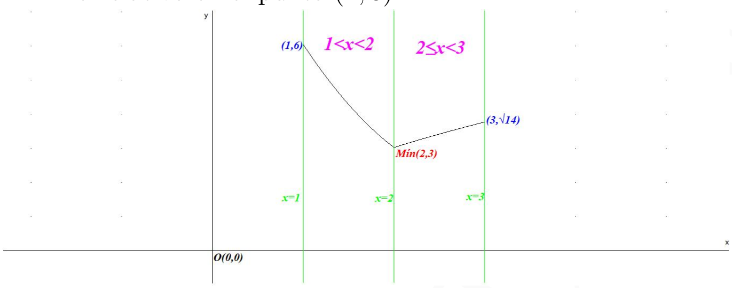
$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+11) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{5x-1} = 3 \\ f(2) = 3 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)}$$

f continua en $x = 2 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$.

b) $$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x-6=0 \Longrightarrow x=3 \text{ No válida} & \text{si} & x<2 \\ \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}} > 0 & \text{si} & x>2 \end{array}\right. .$$

	$(1,2)$	$(2,3)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(2,3)$, y decreciente en el intervalo $(1,2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2,3)$.



c) Hay dos recintos de integración $S_1 : [1,2]$ en la primera rama y $S_2 : [2,3]$ para la segunda.

$$S_1 = \int_1^2 (x^2-6x+11)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x\right]_1^2 = \frac{13}{3}$$

$$F(x) = \int \sqrt{5x-1}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 5x-1 \\ dt = 5dx \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{array}\right] = \int \sqrt{t}\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2(5x-1)^{3/2}}{15}$$

$$S_2 = \int_2^3 \sqrt{5x-1}\,dx = F(3) - F(2) = -\frac{18}{5} + \frac{28\sqrt{14}}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{11+28\sqrt{14}}{15} \simeq 7,71776\ u^2$$

Pregunta 4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0,75 punto) (0.5 puntos) Estudiar la paridad de la función $g(x) = f(xf(x))$

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

a) $g(-x) = f(-xf(-x)) \overset{f(-x)=-f(x)}{=} f(xf(x)) = g(x) \Longrightarrow g$ es par.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\sqrt{4+3f(x)}} = \frac{3\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{4}} = \frac{3\pi}{8}$$

c) $$F(x) = \int x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \Longrightarrow v = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] =$$
$$-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx = -\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$
$$\int_0^1 xf(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{4}{\pi^2}$$

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 5 (2,5 puntos) Sean los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$, y la recta $r \equiv (x,y,z) = (\lambda, \lambda, \lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B.

c) (0,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A.

Solución:

a) Se trata de calcular un plano mediador, el lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ que cumplen $d(A,P) = d(B,P)$:
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2} \Longrightarrow$$
$$\pi : 2x+2y+2z-3 = 0$$

b) $$r : \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(0,0,1) \end{array}\right. \text{ y } \overrightarrow{P_rB} = (1,1,1)-(0,0,1) = (1,1,0)$$
$$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rB} = (1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(0,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y = 0$$

c) $$s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_s = A(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Pregunta 6 (2,5 puntos) Dados los tres planos $\pi_1 : -2x - 2y + z = 0$; $\pi_2 : -2x + y - 2z = 0$ y $\pi_3 : x - 2y - 2z = 0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

b) (1,5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{u_{\pi_1}} = (-2, -2, 1)$, $\overrightarrow{u_{\pi_2}} = (-2, 1, -2)$ y $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, -2, -2)$. Tenemos:

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (-2, -2, 1) \cdot (-2, 1, -2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}}$$
$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (-2, -2, 1) \cdot (1, -2, -2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_3}}$$
$$\overrightarrow{u_{\pi_2}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (-2, 1, -2) \cdot (1, -2, -2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_3}}$$

Los planos son perpendiculares dos a dos.
Tenemos el sistema homogéneo formado por los tres planos:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango(A)=3= nº incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única) y por ser homogéneo la solución es la trivial $x = y = z = 0 \Longrightarrow O(0, 0, 0)$ es el punto de corte de los tres planos.

b)
- ☛ Calculamos una recta $r \perp \pi_1$ que contenga a Q_1:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (-2, -2, 1) \\ P_r = Q_1(1/3, 4/3, 10/3) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} - 2\lambda \\ y = \dfrac{4}{3} - 2\lambda \\ z = \dfrac{10}{3} + \lambda \end{array}\right.$$

- ☛ Calculamos una recta $s \perp \pi_2$ que contenga a Q_2:

$$s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (-2, 1, -2) \\ P_s = Q_2(-1/3, 8/3, 5/3) \end{array}\right. \Longrightarrow s : \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} - 2\mu \\ y = \dfrac{8}{3} + \mu \\ z = \dfrac{5}{3} - 2\mu \end{array}\right.$$

- ☛ El punto P es el de corte entre r y s

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3} - 2\lambda = -\dfrac{1}{3} - 2\mu \\ \dfrac{4}{3} - 2\lambda = \dfrac{8}{3} + \mu \\ \dfrac{10}{3} + \lambda = \dfrac{5}{3} - 2\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

- ☛ $P\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = (1, 2, 3)$

Para calcular el punto Q_3 seguimos el siguiente método:

c) ☞ Calculamos una recta $t \perp \pi_3$ tal que $P \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, -2, -2) \\ P_t = P(1, 2, 3) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

☞ Calculamos el punto Q_3 de corte de t con π_3:
$(1 + \lambda) - 2(2 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q_3(2, 0, 1)$

Bloque 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 7 (2,5 puntos) Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73,2 %.

a) (1,5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0,5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

Solución:

a) Tenemos una binomial $B(n; 1 - 0,732) = B(n; 0,268)$ y tenemos que calcular $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$ y tenemos dos casos:

- Si se reúnen 5 $\Longrightarrow$ $B(5; 0,268)$:
$$P(X > 1) = 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0,268^0 \cdot 0,732^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,268^1 \cdot 0,732^4\right] = 0,40511 < 0,5 \Longrightarrow$$
no se tiene que restringir esta reunión.

- Si se reúnen 7 $\Longrightarrow$ $B(7; 0,268)$:
$$P(X > 1) = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot 0,268^0 \cdot 0,732^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,268^1 \cdot 0,732^6\right] = 0,5988 > 0,5 \Longrightarrow$$
hay que restringir esta reunión.

b) Tenemos $p = 0,732$, $n = 500 \geq 30$, $np = 366 \geq 5$ y $nq = 135 \geq 5$ luego:

$$B(500; 0,732) \overset{N\left(np, \sqrt{npq}\right)}{\approx} N\,(366; 9,904)$$

$$P(X \geq 350) = P\left(Z \geq \frac{349,5 - 366}{9,904}\right) = P(Z \geq -1,67) = P(Z \leq 1,67) = 0,9525$$