

Examen de Matemáticas II (Selectividad - Extraordinaria-Coincidente)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1 (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

- a) (2,5 puntos) En una granja se crían conejos, gallinas y pavos. El coste diario de la comida por animal es de 1,50 euros si es conejo, de 4 céntimos de euro si es gallina, y de 30 céntimos de euro si se trata de un pavo. El coste diario en comida para estos animales en la granja asciende a 44 euros. Se sabe que hay tantas gallinas como cuatro veces el número de pavos más la cuarta parte de los conejos. Además el doble del número de gallinas es igual a la suma de conejos y pavos más diez veces el número de conejos. Se pide averiguar el número de animales de cada tipo en la granja.

- b) Dadas las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & a \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

b.I. (1,25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz AB tiene rango 3.

b.II. (1,25 puntos) Calcular la inversa de B para los valores de a en los que sea posible.

Solución:

- a) Sean x el número de conejos, y el número de gallinas y z el número de pavos.

$$\begin{cases} 150x + 4y + 30z = 4400 \\ y = 4z + \frac{1}{4}x \\ 2y = x + z + 10x \end{cases} \implies \begin{cases} 75x + 2y + 15z = 2200 \\ x - 4y + 16z = 0 \\ 11x - 2y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 20 \text{ conejos} \\ y = 125 \text{ gallinas} \\ z = 30 \text{ pavos} \end{cases}$$

Resolvemos por Gauss: (primero ordenamos las ecuaciones)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 16 & 0 \\ 11 & -2 & 1 & 0 \\ 75 & 2 & 15 & 2200 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 11F_1 \\ F_3 - 75F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 16 & 0 \\ 0 & 42 & -175 & 0 \\ 0 & 302 & -1185 & 2200 \end{array} \right) =$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 42F_3 - 302F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 16 & 0 \\ 0 & 42 & -175 & 0 \\ 0 & 0 & 3080 & 92400 \end{array} \right) \implies$$
$$\begin{cases} 3080z = 92400 \implies z = 30 \\ 42y - 175 \cdot 30 = 0 \implies y = 125 \\ x - 4 \cdot 125 + 16 \cdot 30 = 0 \implies x = 20 \end{cases}$$

b) a.I. $|AB| = |A||B| = a(a-6)(1-3a) = 0 \implies a = 0, a = 6 \text{ y } a = \frac{1}{3} \implies$
 $\text{Rango}(AB) = 3 \forall a \in \mathbb{R} - \left\{0, 6, \frac{1}{3}\right\}$
a.II. $|B| = 1 - 3a = 0 \implies a = \frac{1}{3} \implies \exists B^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$B^{-1} = \frac{1}{1-3a} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3a \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 (Calificación: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

- a) Sean las funciones: $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$,
- a.I. (1 punto) Calcule el límite $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$.
- a.II. (0,75 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en su dominio.
- a.III. (0,75 puntos) Estudie las asíntotas de la función $g(x) + g(-x)$.
- b) Sea la parábola gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4$.
- b.I. (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por $y = 0$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- b.II. (1,5 puntos) Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área apoyado sobre el eje OX que se puede inscribir en la parábola de manera que los lados sean paralelos dos a dos con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

Solución:

a) $f(x) = \frac{e}{e^x - e}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$,

a.I. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} \right] = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(x-1) - (e^x - e)}{(e^x - e)(x-1)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e - e^x + e}{xe^x - e^x - ex + e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ex - e^x}{xe^x - e^x - ex + e} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e - e^x}{xe^x - e} =$
 $\left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^x}{e^x + xe^x} = \frac{-e}{2e} = -\frac{1}{2}$

a.II. $f'(x) = -\frac{e^{x+1}}{(e^x - e)^2} < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \implies f$ es decreciente en todo el dominio de la función y no tiene extremos relativos.

a.III. Sea $h(x) = g(x) + g(-x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{-x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$
Asíntotas:
• Verticales:

- $x = 1$:
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$
- $x = -1$:
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$

☛ Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0$$

☛ Oblicuas: no hay por haber horizontales.

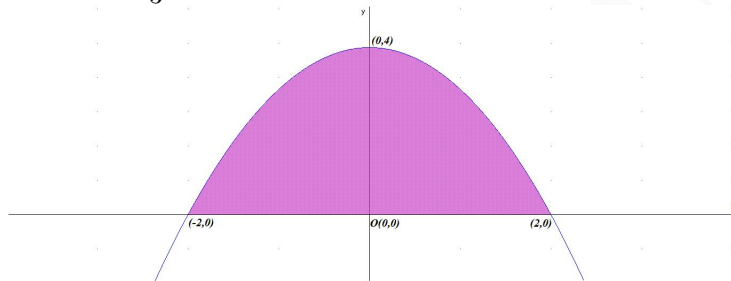
b) $f(x) = -x^2 + 4$.

b.I. Calculamos los puntos de corte de f con el eje de abscisas: $f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, luego sólo hay un recinto de integración $S_1 : [-2, 2]$.

$$S_1 = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

El resultado de la integral es positivo por estar la función por encima del eje de abscisas en el intervalo $(-2, 2)$

$$S = |S_1| = \frac{32}{3} \simeq 10,6667 \text{ u}^2$$



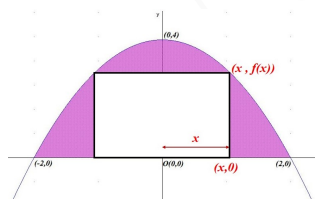
b.II. $S(x) = 2x \cdot f(x) = 2x(-x^2 + 4) = -2x^3 + 8x$

$$S'(x) = -6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S''(x) = -12x \Rightarrow S''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ es un máximo.}$$

La base del rectángulo mide $2x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \simeq 2,3094 \text{ u}$ y la altura mide $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8}{3} \simeq 2,6667 \text{ u}$

$$\text{El área del rectángulo es } S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9} \simeq 6,1584 \text{ u}^2$$



Pregunta 3 (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)

a) Sean el punto $A(1, 2, 3)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 1$. Se pide:

a.I. (0,75 puntos) Calcular la distancia de la recta r al plano π .

a.II. (0,75 puntos) Hallar la proyección ortogonal del punto A sobre la recta r .

- a.III. (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas y los puntos de corte con los ejes coordenados de un plano que pasa por A y es paralelo a π .
- b) Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$, se pide:
- b.I. (1,5 puntos) Hallar un punto sobre S que cumpla que su distancia al punto A sea el doble que su distancia al punto B .
- b.II. (1 punto) Hallar una ecuación del plano perpendicular a S que pasa por el punto medio de S .

Solución:

a) Sean $A(1, 2, 3)$, $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 0, 1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ y $\vec{u}_\pi = (1, 2, -2)$.

a.I. Analizamos la posición de la recta r y el plano π . Sustituimos r en π :

$$(1 + 2\lambda) + 2 \cdot 0 - 2(2 + \lambda) = 1 \implies -3 = 1 \implies r \parallel \pi.$$

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|1 + 0 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{4}{3} u$$

a.II. Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $A \in \pi'$:

$$\pi' : 2x + z + K = 0 \xrightarrow{A(1,2,3) \in \pi'} 2 + 0 + 3 + K = 0 \implies K = -5 \implies \pi' : 2x + z - 5 = 0.$$

La proyección de A sobre r será A' intersección de r con π' :

$$2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) - 5 = 0 \implies \lambda = \frac{1}{5} \implies A' \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{11}{5} \right)$$

a.III. $\pi'' : x + 2y - 2z + S = 0 \xrightarrow{A(1,2,3) \in \pi''} 1 + 4 - 6 + S = 0 \implies S = 1 \implies \pi'' : x + 2y - 2z + 1 = 0$

Calculamos los puntos de corte de π'' con los ejes de coordenadas.

Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies x + 1 = 0 \implies P(-1, 0, 0)$

Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies 2y + 1 = 0 \implies Q \left(0, -\frac{1}{2}, 0 \right)$

Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \implies -2z + 1 = 0 \implies R \left(0, 0, \frac{1}{2} \right)$

Tenemos $\vec{OP} = (-1, 0, 0)$, $\vec{OQ} = \left(0, -\frac{1}{2}, 0 \right)$ y $\vec{OR} = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right)$

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{24} u^3$$

b) Sea S el segmento de recta que une los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$, se pide:

b.I. Sea S se apoya en la recta $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{AB} = (1, -1, 1) \\ P_r = A(0, 1, 0) \end{cases} \implies$

$$S : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in [0, 1] \text{ un punto } P \in S \text{ es } P(\lambda, 1 - \lambda, \lambda).$$

$$|\vec{AP}| = |(\lambda, 1 - \lambda, \lambda) - (0, 1, 0)| = |(\lambda, -\lambda, \lambda)| = |\lambda|(1, -1, 1)| = |\lambda|\sqrt{3}$$

$$|\vec{BP}| = |(\lambda, 1 - \lambda, \lambda) - (1, 0, 1)| = |(\lambda - 1, 1 - \lambda, \lambda - 1)| = |\lambda - 1|(1, -1, 1)| = |\lambda - 1|\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AP}| = 2|\overrightarrow{BP}| &\implies |\lambda|\sqrt{3} = 2|\lambda - 1|\sqrt{3} \implies |\lambda| = 2|\lambda - 1| \implies \\
\begin{cases} \lambda = 2\lambda - 2 \implies \lambda = 2 \text{ no válida} \\ \lambda = -2\lambda + 2 \implies \lambda = \frac{2}{3} \implies P\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases} \cdot \\
\text{b.II. } C = \frac{A+B}{2} = \frac{(1, 1, 1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ y } \overrightarrow{u_{\pi''}} = \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1) \implies \pi''' : x - y + z + \beta = \\
0 \xrightarrow{C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \pi'''} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \beta = 0 \implies \beta = -\frac{1}{2} \implies \pi''' : x - y + z - \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

Pregunta 4 (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente: Una compañía ferroviaria tiene el siguiente compromiso de puntualidad en sus trenes de larga distancia: si un tren llega a destino con un retraso de entre 30 y 60 minutos devuelve la mitad del importe del billete a sus usuarios. Si el retraso es de más de una hora, devuelve el importe completo del billete. En los trayectos entre las ciudades A y B , según la compañía, el 80 por ciento de los trenes llegan puntuales o con retraso inferior a la media hora, el 15 por ciento con retraso de entre 30 y 60 minutos y el resto con retraso superior a una hora.

- (1 punto) Un usuario enfurecido escribe este post en una red social: “De los cuarenta trayectos que hice el año pasado entre A y B , en diez trayectos llegué con retraso de más de una hora. Según mis cálculos, esto debería haber ocurrido con una probabilidad menor de una entre un millón.” ¿Ha hecho bien los cálculos el usuario enfurecido?
- (1.5 puntos) En enero de 2025 la compañía ha realizado seis trayectos entre A y B cada día. Asumiendo la veracidad de los datos de la compañía y aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que como mucho en una sexta parte de los trayectos la compañía ferroviaria haya tenido que devolver dinero a los usuarios.

Solución:

- $B(40; 1 - (0, 15 + 0, 8)) = B(40; 0, 05)$
 $P(X = 10) = \binom{40}{10} \cdot 0,05^{10} \cdot 0,95^{30} = 0,0000178 > 0,000001$ los cálculos del viajero no son correctos.
- $B(6 \cdot 31; 0, 2) = B(186; 0, 2)$ como $n = 186 \geq 30$, $np = 37,2 > 5$ y $nq = 148,8 > 5 \implies B(186; 0, 2) \stackrel{N(np; \sqrt{npq})}{\approx} N(37, 2; 5, 455)$
Tenemos $\frac{186}{6} = 31$
 $P(X \leq 31) = P\left(Z \leq \frac{31,5 - 37,2}{5,455}\right) = P(Z \leq -1,04) = 1 - P(Z \leq 1,04) = 1 - 0,8508 = 0,1492$