# Examen de Matemáticas II (Selectividad - Extraordinaria 2025)

---

**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
**CALIFICACIÓN:** Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.
**TIEMPO:** 90 minutos.

---

**Pregunta 1 (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)**

a) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real $k$:
$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

I. (1,5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de $k$.

II. (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

I. (1,5 puntos) Hallar las matrices simétricas $B$ que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.

II. (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar $A_{2025}$.

**Solución:**

a) I. $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = k^3 + 2k^2 + k = 0 \Longrightarrow k = 0$ y $k = -1$.

- Si $k \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única)
- Si $k = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) =$
$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución)
- Si $k = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

II. $\begin{cases} y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

b) I. $B$ es simétrica si $B = B^T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$BA = (A+A^2)B \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^2\right]\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a-b & 5a-3b \\ b-c & 5b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b & -3b-5c \\ a+b & b+c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a-b=-3a-5b \\ 5a-3b=-3b-5c \\ b-c=a+b \\ 5b-3c=b+c \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a=-c \\ b=c \end{cases} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} -c & c \\ c & c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

II. Tenemos $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

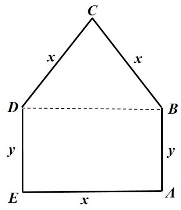
$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

..........................................

$$A_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n \text{ par} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n \text{ impar} \end{cases} \Longrightarrow A_{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**Pregunta 2 (Calificación: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:**
Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$. Se sabe que $A$, $B$, $D$ y $E$ forman un rectángulo, y que el punto $C$ se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos $B$ y $D$.
¿A qué distancia del vértice $A$ el agricultor debe ubicar los vértices $B$ y $E$ si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?
**Solución:**

Tenemos $3x+2y=120 \Longrightarrow y = \dfrac{120-3x}{2}$




$h = \sqrt{x^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ El área de la figura es:

$S(x,y,h) = xy + \dfrac{xh}{2} \Longrightarrow S(x) = x\dfrac{120-3x}{2} + \dfrac{x\frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} =$
$\dfrac{120x-3x^2}{2} + \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1}{4}(240x-6x^2+\sqrt{3}x^2) = \dfrac{1}{4}(240x+(\sqrt{3}-6)x^2)$

$S'(x) = \dfrac{1}{4}(240+2(\sqrt{3}-6)x) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{120}{\sqrt{3}-6} \simeq 28,1165$ m.

$S''(x) = \dfrac{1}{4}(2(\sqrt{3}-6)) < 0 \Longrightarrow S''(28,1165) < 0 \Longrightarrow x = 28,1165$ es un máximo.

$y = \dfrac{120 - 3 \cdot 28,1165}{2} \simeq 17,8252$ m
La distancia de $A$ a $B$ tiene que ser $y = 17,8252$ m y de $A$ a $E$ será de $28,1165$ m.

**Pregunta 3 (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)**

a) Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$$

i. (0,5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.

ii. (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro $ABCD$ determinada por los puntos $A$, $B$ y $C$ y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice $D$.

iii. (1 punto) Calcule la distancia entre la recta $r$ y la recta determinada por los puntos $B$ y $D$.

b) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

i. (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje $OZ$ y que pasa por los puntos $A$ y $B$.

ii. (1,5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z = 1$ que diste una unidad tanto del punto $A$ como del punto $B$.

**Solución:**

a) i. Sean:
$\overrightarrow{AB} = (2,-1,0) - (1,1,2) = (1,-2,-2)$,
$\overrightarrow{AC} = (-2,0,3) - (1,1,2) = (-3,-1,1)$,
$\overrightarrow{AD} = (2,-3,-1) - (1,1,2) = (1,-4,-3)$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ los cuatro puntos no son coplanarios.

El volumen del tetraedro es: $V_T = \dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \dfrac{1}{6}|-3| = \dfrac{1}{2}\ u^3$

Tenemos $V_T = \dfrac{1}{3} S_t \cdot h \Longrightarrow h = \dfrac{3V_t}{S_t} = \dfrac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}\ u$

ii. Sea $S_t$ el área del triángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ base del tetraedro:

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(-4,5,-7)| = \frac{3\sqrt{10}}{2}\ u^2$$

iii. Tenemos $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}$ y $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BD} = (2,-3,-1) - (2,-1,0) = (0,-2,-1) \\ P_s = B(2,-1,0) \end{cases}$

y $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,-1,0) - (1,-1,0) = (1,0,0)$

$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \right| = |-3| = 3$

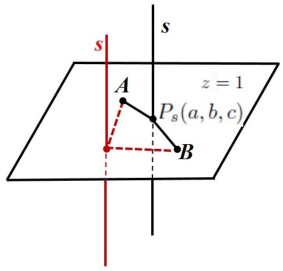
$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}| = |(-3, 2, -4)| = \sqrt{29}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29}\ u$$

b) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

I. $$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{k} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{AB} = (1,0,0) \\ A(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = y = 0 \Longrightarrow \pi : y = 0$$

II. Tenemos:




Sustituyendo $A$ y $B$ en el plano $z = 1$ comprobamos que ambos puntos se encuentran dentro del plano. La recta $s$ perpendicular al plano le corta en un punto que debe de estar a distancia 1 de $A$ y $B$.

Llamamos $P_s(a,b,c)$ a este punto de corte de $s$ con $z = 1 \Longrightarrow 0 + 0 + c = 1 \Longrightarrow P_s(a,b,1)$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0,0,1) \\ P_s(a,b,1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$|\overrightarrow{AP_s}| = |(a,b,1) - (0,0,1)| = |(a,b,0)| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$

$|\overrightarrow{BP_s}| = |(a,b,1) - (1,0,1)| = |(a-,b,0)| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1$

$a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Longrightarrow -2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$

$a^2 + b^2 = \dfrac{1}{4} + b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Luego $P_s\left(\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$

**Pregunta 4 (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes: a) o b)**

a) En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75,67 y desviación típica 11,05. Se pide:

I. (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos

II. (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.

III. (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

b) La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0,08 y en un día seco es de 0,004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0,032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

  I. (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.

  II. (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

**Solución:**

a) $N(75,67;11,05)$

  I. $P(60 \le X \le 80) = P\left(\dfrac{60-75,67}{11,05} \le Z \le \dfrac{80-75,67}{11,05}\right) = P(-1,42 \le Z \le 0,39) = P(Z \le 0,39) - P(Z \le -1,42) = P(Z \le 0,39) - (1 - P(Z \le 1,42)) = 0,6517 - (1 - 0,9222) = 0,5739$

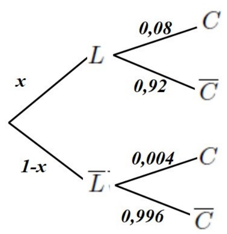
  II. $P(X \ge 100) = P\left(Z \ge \dfrac{100-75,67}{11,05}\right) = P(Z \ge 2,2) = 1 - P(Z \le 2,2) = 1 - 0,9861 = 0,0139.$

  III. $n = 10$, $p = 0,0139$ y $q = 0,9861 \Longrightarrow B(10;0,0139)$

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$\binom{10}{0}0,0139^0 \cdot 0,9861^{10} + \binom{10}{1}0,0139^1 \cdot 0,9861^9 = 0,9919$$

b) Sean $C$ sufre una caída, $\overline{C}$ no sufre caída, $L$ llueve y $\overline{L}$ no llueve.
Tenemos $P(C|L) = 0,08$, $P(C|\overline{L}) = 0,004$ y $P(L \cap C) = 0,032$




  I. $P(L \cap C) = P(C|L)P(L) \Longrightarrow 0,032 = 0,08x \Longrightarrow x = P(L) = 0,4$ y $P(\overline{L}) = 0,6$
  $P(\overline{C}) = P(\overline{C}|L)P(L) + P(\overline{C}|\overline{L})P(\overline{L}) = 0,92 \cdot 0,4 + 0,996 \cdot 0,6 = 0,9656$

  II. $P(\overline{L}|C) = \dfrac{P(C|\overline{L})P(\overline{L})}{P(C)} = \dfrac{0,004 \cdot 0,6}{1 - 0,9656} = 0,0698$