Examen de Matemáticas II
Galicia (Modelo 2025)

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Problema 0.0.1 Probabilidad y estadística (2,5 puntos)
CONTEXTO
Algunas pruebas médicas resultan ser «positivas» o «negativas». Si la prueba fuese infalible, «positiva» indicaría que la persona examinada tiene la enfermedad en cuestión; «negativas» indicaría que no la tiene. Una guionista está escribiendo, para una conocida plataforma de streaming, una historia que tiene lugar en un país imaginario. Explica en su guion que, para detectar una rara enfermedad que afecta a 1 de cada 10000 personas, una empresa farmacéutica logra desarrollar una prueba que resulta ser muy fiable, pues solamente 1 de cada 100 personas libres de la enfermedad obtiene un resultado positivo, y solamente 2 de cada 100 personas que padecen la enfermedad obtienen resultados negativos. Dice también que los detalles que revelan el diseño de la prueba están protegidos por varios sistemas de seguridad, y que, el 9 de agosto de 2024, la clave que permite abrir el último de esos sistemas es el número 219, el cual se ha calculado, específicamente para ese día, de la siguiente manera:

Clave = nº de ríos cuya longitud en metros comienza con el dígito 9, de entre los 2000 más largos del país= 219.

Poco antes de entregar su guion, le surgen dudas acerca de la verosimilitud de sus cifras, conque decide compartirlas con una amiga matemática. Esta le dice que le responderá una vez que calcule las siguientes probabilidades:

- P_1 = la probabilidad de que una persona con una prueba positiva tenga la enfermedad.
- P_2 = la probabilidad de que una persona con una prueba negativa tenga la enfermedad.
- P_3 = la probabilidad de que 219 ríos o más tengan una longitud en metros cuyo primer dígito sea el 9.
  Con relación a este punto, la amiga matemática observa que, en muchos conjuntos de datos reales, los primeros dígitos no se distribuyen de manera uniforme, sino que siguen la llamada ley de Benford, la cual afirma que la probabilidad de que un número comience con el dígito d es $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por ello, supondrá que la probabilidad de que un río tenga una longitud en m cuyo primer dígito sea el 9 es $p = 0,0458$.

Responda estos tres apartados:

a) (0,5+0,5=1 punto) Calcule P_1 y P_2. Entienda que los únicos resultados posibles de la prueba son «positivo»o «negativo».

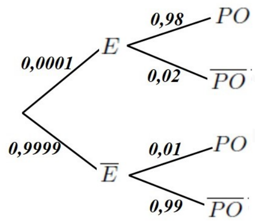
b) (1 punto) Calcule P_3.

c) (0,5 puntos) En función de los valores de P_1, P_2 y P_3, dé al menos un motivo por el cual la guionista debería modificar alguna de sus cifras. No es necesario que diga cuáles deberían ser esas modificaciones ni cómo deberían ser efectuadas.

Solución:
Sean los sucesos E tiene la enfermedad, $\overline{E}$ no tiene la enfermedad, PO el resultado de la prueba es positivo y $\overline{PO}$ el resultado de la prueba es negativo.

a) $P(PO) = P(PO|E)P(E) + P(PO|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,98 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,9999 = 0,010097$

- ☛ $P_1 = P(E|PO) = \dfrac{P(PO|E)P(E)}{P(PO)} = \dfrac{0,98 \cdot 0,0001}{0,010097} = 0,009705853223$



- ☛ $P_2 = P(E|\overline{PO}) = \dfrac{P(\overline{PO}|E)P(E)}{P(\overline{PO})} = \dfrac{0,02 \cdot 0,0001}{1 - 0,010097} = 0,000002$

b) Tenemos $n = 2000$ y $p = 0,0458 \Longrightarrow B(2000; 0,0458)$
Como $n \geq 30$, $np = 2000 \cdot 0,0458 = 91,6 > 5$ y $nq = 2000 \cdot (1 - 0,0458) = 1908,4 > 5 \Longrightarrow$
$B(2000; 0,0458) \overset{N\left(np,\sqrt{npq}\right)}{\approx} N(91,6; 9,349)$
$P(X \geq 219) = P\left(Z \geq \dfrac{218,5 - 91,6}{9,349}\right) = P(Z \geq 13,57) = 1 - P(Z \leq 13,57) = 1 - 1 = 0$
Luego $P_3 = 0$

c) La probabilidad P_1 (falsos positivos) es muy baja ($\approx 1\,\%$) aunque puede ser mejorable y la clave no parece ser la adecuada por haber 219 ríos que ya cumplen la condición.

Números y Álgebra:

Problema 0.0.2 NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos)
Responda uno de estos dos apartados: a) o b)

a) Responda los dos subapartados siguientes, considerando este sistema lineal:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m + 1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$$

1. Discuta el sistema en función del valor del parámetro real m. (2 puntos)
2. Si es posible, resuélvalo en el caso $m = 0$. (0,5 puntos)

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 punto)
2. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad. (1,5 puntos)

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array}\right)$, $|A| = m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow m = -1$ y $m = 2$.

1. ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $m=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

☛ Si $m=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

2. Si $m=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z=1\\ x+y+z=1\\ x-z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\\ y=0\\ z=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

b) 1. Sea $(AB)^T=C\Longrightarrow AB=C^T\Longrightarrow A=C^TB^{-1}=$
$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

2. $|A-3I|=\begin{vmatrix}0 & x\\ y & z-3\end{vmatrix}=-xy=0\overset{y\neq 0}{\Longrightarrow}x=0\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ y & z\end{pmatrix}$

y como A es invertible tiene que ser $z\neq 0$ ya que $A^{-1}=\dfrac{1}{3z}\begin{pmatrix}z & 0\\ -y & 3\end{pmatrix}$

sustituyendo en $(3z)A^{-1}+I=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ tenemos $\begin{pmatrix}z & 0\\ -y & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\Longrightarrow$

$\begin{pmatrix}z+1 & 0\\ -y & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} z+1=2\Longrightarrow z=1\\ -y=-1\Longrightarrow y=1\\ x=0\end{array}\right.$

Análisis

Problema 0.0.3 ANÁLISIS. (2,5 puntos)

a) **Responda los dos subapartados siguientes:**

1. Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial. (1,25 puntos)
2. Explique si $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del calculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema. (0,75+0,5=1,25 puntos)

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Calcule mediante cambio de variable las siguientes integrales:

   I. $\int (\sin x)^5 \cos x dx$. (0,5 puntos)

   II. $\int (\ln x)/x dx$. (0,5 puntos)

2. Calcule $\int (\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x dx = 3/2$. (1+0,5=1,5 puntos)

Solución:

1. **Teorema de Rolle**
   Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
   Teorema del Valor Medio de Lagrange
   Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2. La función f es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$ luego cumple las condiciones del teorema del valor medio.
   Luego $\exists c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{0 - 1}{1} = -1$

   $$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \Longrightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{1 - c^2}} = -1 \Longrightarrow -c = -\sqrt{1 - c^2} \Longrightarrow$$

   $$c^2 = 1 - c^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{c\in(0,1)} c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. I. $$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array} \right] = \int t^5 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^5\, dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(\sin x)^6}{6} + C$$

   II. $$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ dx = xdt \end{array} \right] = \int \frac{t}{x} xdt = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

2. $$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = \dfrac{1}{x} dx \Longrightarrow v = \ln x \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array} \right] = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\, dx = (\ln x)^2 - F(x) \Longrightarrow$$

   $$2F(x) = (\ln x)^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

   $$\int_e^B \frac{\ln x}{x}\, dx = F(B) - F(e) = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{(\ln B)^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Longrightarrow$$

   $$\ln B = \pm 2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = e^{-2} \\ B = e^2 \end{array} \right.$$

Problema 0.0.4 GEOMETRÍA. (2,5 puntos)

a) **Responda los dos subapartados siguientes:**

1. Se consideran $\pi : ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{3}$
   I. Estudie la posición relativa del plano π y la recta r en función de a. (0,5 puntos)
   II. Obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. (0,5 puntos)
   III. Razone si r puede estar contenida en π o no. (0,5 puntos)
2. Si π es el plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga qué valor debe tomar el parámetro real b para que la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-b}{3} = \dfrac{z+1}{3}$ esté contenida en π. (1 punto)

b) Responda los dos subapartados siguientes, donde π es el plano de ecuación $2x - y + z = 1$:

1. Calcule la distancia de π al punto de corte de las rectas
$$r_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right. \quad \text{y } r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{array} \right. , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \text{ (1,25 puntos)}$$
2. Obtenga el punto simétrico de $P(1, 0, 0)$ con respecto a π. (1,25 puntos)

Solución:

a) 1. $\pi : ax + y + z = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (a, 1, 1)$ y $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right.$

I. $$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
sustituyendo en π: $a(1 + 2\lambda) + 3\lambda + (-1 + 3\lambda) = 1 \Longrightarrow (2a + 6)\lambda = 2 - a \Longrightarrow$
$$\left\{ \begin{array}{l} a = -3 \Longrightarrow !0 = 5! \Longrightarrow r \parallel \pi \\ a \neq -3 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2-a}{2a+6} \Longrightarrow r \text{ y } \pi \text{ se cortan} \end{array} \right.$$

II. $r \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = k\overrightarrow{u_r}$ con $k \in \mathbb{R} \Longrightarrow (a, 1, 1) = k(2, 3, 3) \Longrightarrow$
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2k \\ 1 = 3k \\ 1 = 3k \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{2}{3} \\ k = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$
Si $a = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow r \perp \pi$

III. Si $a = -3 \Longrightarrow r \parallel \pi$ y si $a \neq -3 \Longrightarrow r$ y π se cortan, luego $r \not\subset \pi$. Se puede comprobar que para $a = -3$ el punto $P_r \notin \pi$:
$$\pi : -3x+y+z = 1 \xrightarrow{P_r(1,0,-1)\in\pi} -3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot(-1) = -4 \neq 1 \Longrightarrow P_r \notin \pi \Longrightarrow r \not\subset \pi$$

2. Ahora $\pi : -3x + y + z = 1$ y $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = b + 3\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array} \right.$ sustituyendo r en π:
$-3(1 + 2\lambda) + (b + 3\lambda) + (-1 + 3\lambda) = 1 \Longrightarrow b - 4 = 1 \Longrightarrow b = 5$

b) Tenemos $\pi : 2x - y + z = 1$:

1. Calculamos el punto de corte de las rectas
$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda = \mu \\ y = 0 = -1+\mu \\ z = -1-\lambda = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \\ \lambda = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow P(1,0,0)$$
$$d(P,\pi) = \frac{|2-0+0-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

2. Seguimos el siguiente método:
   - ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:
   $$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_t = P(1,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow t: \left\{\begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$
   - ☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π:
   $$2(1+2\lambda) - (-\lambda) + \lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$
   - ☛ P' punto medio entre P y el que buscamos P'', es decir:
   $$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2\left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) - (1,0,0) \Longrightarrow P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$