Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2025

Problema 1 En un instituto el 55 % de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30 % de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias cursan como optativa la asignatura "Proyecto de Investigación Integrado" y de los que no hacen este Bachillerato, el 40 % cursan esta asignatura como optativa.

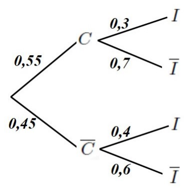
a) Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura "Proyecto de Investigación Integrado"?

b) Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura "Proyecto de Investigación Integrado", ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Solución:
Sean los sucesos C Bachillerato de Ciencias, $\overline{C}$ otro bachillerato, I cursa como optativa "Proyecto de Investigación Integrado" y $\overline{I}$ no cursa como optativa "Proyecto de Investigación Integrado".

a) $P(I) = P(I|C)P(C) + P(I|\overline{C})P(\overline{C}) =$
$0,3 \cdot 0,55 + 0,4 \cdot 0,45 = 0,345$

b) $P(C|\overline{I}) = \dfrac{P(\overline{I}|C)P(C)}{P(\overline{I})} = \dfrac{0,7 \cdot 0,55}{1 - 0,345} = 0,58779$



Problema 2 En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

a) ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

b) Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

c) (1 punto) Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

(Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,15) = 0,5596$, $F(0,3333) = 0,6294$, $F(0,385) = 0,65$, $F(0,5596) = 0,7112$,

$F(0,6294) = 0,7356,\ F(0,8159) = 0,7939.)$

Solución:

$$N(85; 15)$$

a) $P(X \geq 90) = P\left(Z \geq \dfrac{90-85}{15}\right) = P(Z \geq 0,3333) = 1 - P(Z \leq 0,3333) = 1 - 0,6294 = 0,3706 \Longrightarrow 37,06\,\%$

b) $10000 \cdot P(x \leq 90) = 10000(1 - 0,3706) = 6294$ habitantes.

c) $P(X \leq 70) = \dfrac{5596}{10000} = 0,5596$
$P(X \leq 70) = P\left(Z \leq \dfrac{70-\mu}{15}\right) = 0,5596 \Longrightarrow \dfrac{70-\mu}{15} = 0,15 \Longrightarrow \mu = 67,75$
La media ha descendido notablemente y podemos afirmar que la campaña ha funcionado.

Problema 3 La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7,41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

a) Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía y mida más de 180 cm.

b) Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía o mida más de 180 cm.

Solución:

$$N(175; 7,41)$$

a) Partimos de que los sucesos medir más de 180 y llamarse Lucía son independientes. Sea el suceso llamarse Lucía$\equiv L$ y medir más de 180$\equiv M$.
$P(M) = P(X \geq 180) = P\left(Z \geq \dfrac{180-175}{7,41}\right) = P(Z \geq 0,67) = 1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$
$P(L \cap M) = P(L) \cdot P(M) = 0,006 \cdot 0,2514 = 0,00151$

b) $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) = 0,006 + 0,2514 - 0,00151 = 0,2559$

Problema 4 Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 ($E1$), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 ($E2$) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 ($E3$). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para $E2$, el B para $E3$ y el C para $E1$. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	$E1$	$E2$	$E3$
Trat. A	$0,6$	1	$0,4$
Trat. B	$0,65$	$0,5$	$0,9$
Trat. C	$0,75$	$0,2$	$0,5$

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene $E3$ es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Solución:

Tenemos $P(E1) = 0,7$, $P(E2) = 0,2$ y $P(E3) = 0,1$ y las probabilidades de la tabla son las condicionadas $P(\text{Trat}|Ei)$ y tendremos:

$P(A) = P(A|E1)P(E1)+P(A|E2)P(E2)+P(A|E3)P(E3) = 0,6\cdot 0,7+1\cdot 0,2+0,4\cdot 0,1 = 0,66$

$P(B) = P(B|E1)P(E1) + P(B|E2)P(E2) + P(B|E3)P(E3) = 0,65 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,1 = 0,645$

$P(C) = P(C|E1)P(E1) + P(C|E2)P(E2) + P(C|E3)P(E3) = 0,75 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,615$

Si no conocemos la enfermedad el tratamiento más eficaz es el A.

Problema 5 Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^C) = 0{,}35$, donde B^C denota el suceso contrario de B.

a) Calcule $P(A)$.

b) Calcule $P(B)$.

c) Calcule $P(A \cap B^C)$.

d) Calcule $P(A \cup B)$.

Solución:

$$N(175; 7,41)$$

a) $P(A) = P(X \geq 170) = P\left(Z \geq \dfrac{170 - 175}{7,41}\right) = P(Z \geq -0,67) = P(Z \leq 0,67) = 0,7486$

b) $P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0,35 = 0,65$

c) Suponemos los sucesos A y B como independientes:
$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7486 - 0,7486 \cdot 0,65 = 0,26201$

d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) + P(A \cap B^C) = 0,65 + 0,26201 = 0,91201$