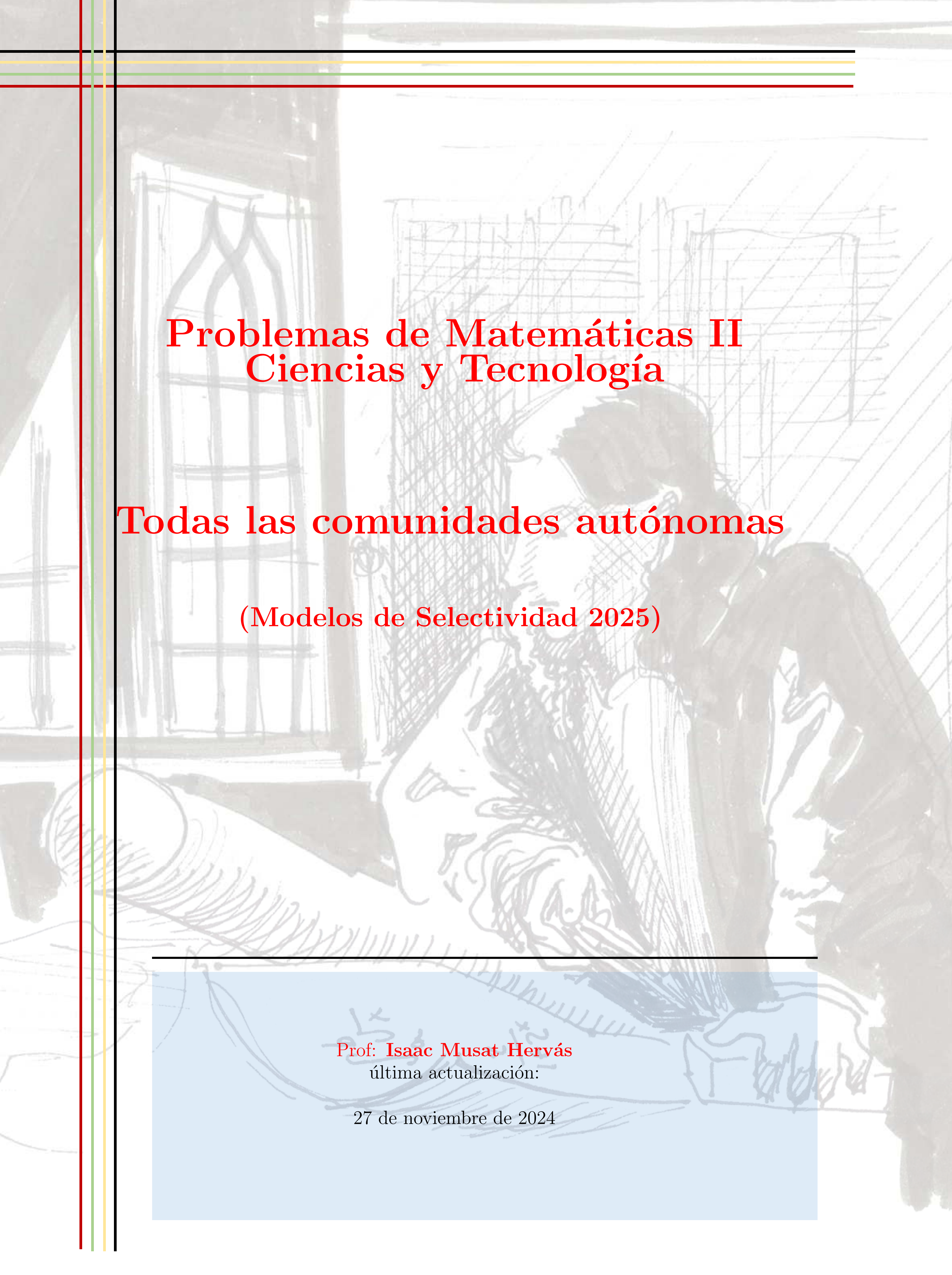


Problemas de Matemáticas II
Ciencias y Tecnología

Todas las comunidades autónomas

(Modelos de Selectividad 2025)

Prof: **Isaac Musat Hervás**
última actualización:

27 de noviembre de 2024

Las matemáticas pueden ser definidas
como aquel tema
en el cual no sabemos nunca
lo que estamos hablando,
ni si lo que decimos es cierto.
Bertrand Russell

Índice general

Capítulo 1

Andalucía

1.1. Modelo

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.

d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

e) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.

f) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, solo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

g) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni graficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

h) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

i) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE OBLIGATORIO Resuelve el siguiente ejercicio:

Problema 1.1.1 (2,5 puntos) Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.
Solución:

- ☛ $x + y = 1 \Longrightarrow y = 1 - x$
- ☛ $P(x, y) = y\sqrt{x} \Longrightarrow P(x) = (1 - x)\sqrt{x}$

☛ $P'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
$P'(x)$	$+$	$-$
$P(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$P(x)$ crece en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ y decrece en el $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ con un máximo en $x = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow y = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

Problema 1.1.2 (2,5 puntos) Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$. Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

Solución:

$$r: \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(3,2,0) \end{cases}$$

$$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (3,1,0) \\ A(-1,0,0) \end{cases} \quad \pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + 3y - 2z - 1 = 0 \Longrightarrow \pi: x - 3y + 2z + 1 = 0$$

Sea $P(x,y,z) \in r \Longrightarrow P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$ y cumple $d(P,\pi) = \sqrt{14}$:

$$d(P,\pi) = \frac{|3 + 2\lambda - 3(2+\lambda) + 2\lambda + 1|}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{|\lambda - 2|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \Longrightarrow |\lambda - 2| = 14 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda - 2 = 14 \Longrightarrow \lambda = 16 \Longrightarrow P_1(35, 18, 16) \\ \lambda - 2 = -14 \Longrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow P_2(-21, -10, -12) \end{cases}$$

Problema 1.1.3 (2,5 puntos) Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S.

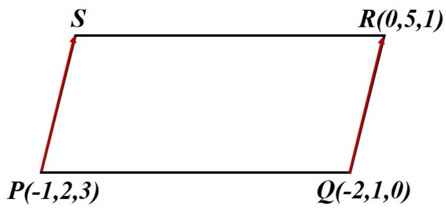
a) (1 punto) Halla las coordenadas del punto S.

b) (1,5 punto) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R.

Solución:

a) Ordenamos los puntos consecutivamente:

$$S = P + \overrightarrow{PS} = P + \overrightarrow{QR} = (-1,2,3) + (2,4,1) = (1,6,4)$$



b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{PS} = (2,4,1) \\ P(-1,2,3) \end{cases}$ $\quad \pi = \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 11x - 5y - 2z + 27 = 0$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (11,-5,-2) \\ P_r = O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

Problema 1.1.4 (2,5 puntos) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Calcula A^{10}.

b) (1,75 puntos) Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I + A + A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{10} = (A^3)^3 A = O \cdot A = O$

b) $I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|I + A + A^2| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists (I + A + A^2)^{-1} \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$(I + A + A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1.1.5 (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define la matriz $M = A + (\lambda - 1)B$.

a) (1,5 puntos) Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.

b) (1 punto) Para $\lambda = -1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.

Solución:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (\lambda - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $|M| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ y $\lambda = 2$.

- ☛ Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

- ☛ Si $\lambda=-1\Longrightarrow |M|=0$.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{vmatrix}1&1\\1&-2\end{vmatrix}=-3\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(M)=2.$$

- ☛ Si $\lambda=2\Longrightarrow |M|=0$.

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\text{ las tres filas son iguales}\Longrightarrow \text{Rango}(M)=1.$$

b) $\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Tenemos que $\text{Rango}(M)=2\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

$$\left\{\begin{array}{l}x+y-2z=0\\x-2y+z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{array}\right.\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

Problema 1.1.6 (2,5 puntos) Sabiendo que $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=e^{x^2}$ es una primitiva de f.

a) (1,25 puntos) Comprueba que f es creciente.

b) (1,25 puntos) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y la recta $x=1$.

Solución:

a) $F'(x)=f(x)=2xe^{x^2}\Longrightarrow f'(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}>0\Longrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\Longrightarrow f$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) Tenemos que $f(x)=2xe^{x^2}=0\Longrightarrow x=0$, luego el recinto de integración será $S:[0,1]$ y la función estará por encima del eje de abscisas.

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)=e-1\simeq 1,7183\;u^2$$

Problema 1.1.7 (2,5 puntos) Estudios realizados en un cierto país demuestran que el consumo de gasolina en autos compactos está normalmente distribuido, con una media de 6 litros por cada 100 km y una desviación estándar de 1,2 litros por cada 100 km.

a) (1 punto) Calcula el porcentaje de autos compactos que gasta 7 o más litros cada 100 km.

b) (1,5 puntos) Calcula el número máximo de litros por cada 100 km que debe consumir un auto compacto si el fabricante quiere que supere en economía de combustible al 95 % de los que hay actualmente en el mercado.

Nota: trabaja con cuatro cifras decimales.
Solución:

$$N(6;1,2)$$

a) $P(X \geq 7) = P\left(Z \geq \dfrac{7-6}{1,2}\right) = P(Z \geq 0,83) = 1 - P(Z \leq 0,83) = 1 - 0,7967 = 0,2033 = 20,33\,\%$

b) $P(X \geq a) = P\left(Z \geq \dfrac{a-6}{1,2}\right) = 0,95 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{a-6}{1,2}\right) = 0,95 \Longrightarrow -\dfrac{a-6}{1,2} = 1,645 \Longrightarrow a = 4,026$ litros.

Capítulo 2

Aragón

2.1. Modelo

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción I y Opción II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.
El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).
Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.
TIEMPO DISPONIBLE: 1 hora 30 minutos

Problema 2.1.1 (2,5 puntos) El trabajo de Gema y Fernando sobre la evolución de la contaminación acústica de su ciudad ha sido seleccionado como el mejor de su instituto. Además del reconocimiento, les han premiado con dos entradas para un partido del Casademont femenino. A ambos les gustaría ir juntos, pero les da vergüenza reconocerlo. Así que deciden sortear quién se las queda. Inicialmente, proponen tirar una moneda tres veces cada uno. Quien obtenga más caras gana las dos entradas. En caso de empate, no gana nadie y se irán juntos al partido. Fernando piensa que, como hay tres situaciones posibles, la probabilidad de que empaten es un tercio.

a) (0,75 puntos) ¿Tiene razón Fernando al pensar que la probabilidad de empate con el sorteo de las monedas sería un tercio? En caso de no tener razón, ¿en cuánto se equivoca? Así que decide proponer un sorteo más elaborado con idea de aumentar la probabilidad de empate. Cada uno de ellos pensará una función y tirará un dado de seis caras no trucado tres veces. Si el valor de la derivada de su función evaluada en el valor que saque el dado es mayor o igual a cero, consigue un punto. Quien más puntos obtenga con sus tres tiradas, gana. En caso de empate, se van juntos al partido. A Gema le encantan las matemáticas, así que acepta inmediatamente. Ella escribe en su papel su función, $g(x) = e^x$ pensando que Fernando también elegirá una función cuya derivada sea siempre positiva. Para su sorpresa, la función de Fernando es $f(x) = \cos 2x$. Así que, rápidamente, para obtener la máxima probabilidad de empate, cambia su función por otra cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado.

b) (0,5 puntos) Propón una función que cumpla las características que busca Gema una vez conoce la función propuesta por Fernando.

c) (0,75 puntos) ¿Ha conseguido Fernando su propósito de aumentar la probabilidad de empate?

d) (0,5 puntos) Si Fernando hubiera visto la función $g(x)$ que tenía pensada Gema inicialmente, ¿cómo tendría que haber elegido su función para lograr la máxima probabilidad de empate?

Solución:

a) Sean C sale cara y X sale cruz. El espacio muestral de lanzar una moneda tres veces es $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$
Sean G gana Gemma, F gana Fernando y E empatan. Sean Z la variable aleatoria que representa el número de caras que obtiene Gemma e Y las que obtiene Fernando.
Tenemos:
$P(Z=3) = P(Y=3) = \dfrac{1}{8}$, $P(Z=2) = P(Y=2) = \dfrac{3}{8}$, $P(Z=1) = P(Y=1) = \dfrac{3}{8}$ y $P(Z=0) = P(Y=0) = \dfrac{1}{8}$
La probabilidad de empate se podría calcular de forma directa:
$P(E) = P(Z=3 \cap Y=3) + P(Z=2 \cap Y=2) + P(Z=1 \cap Y=1) + P(Z=0 \cap Y=0) = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{16}$
Otra forma sería: .
$P(G) = P(Z=3 \cap Y<3) + P(Z=2 \cap Y<2) + P(Z=1 \cap Y<1) = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{7}{8} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{4}{8} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{22}{64} = \dfrac{11}{32}$
Luego $P(G) = P(F) = \dfrac{11}{32}$.
La probabilidad de empate es $P(E) = 1 - (P(G) + P(F)) = 1 - \dfrac{22}{32} = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$
La afirmación es falsa $P(E) = \dfrac{5}{16} \neq \dfrac{1}{3}$ el error de apreciación será $\dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{16} = \dfrac{1}{48} \simeq 0,02083$ (bastante pequeño)
El error absoluto sería: $\varepsilon = \left|\dfrac{\frac{5}{16} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{16}}\right| \cdot 100\ \% = \dfrac{1}{15}\cdot 100\ \% \simeq 6,67\ \%$

b) Cuando sale un uno en el dado la derivada de la función tiene que ser negativa cuando sustituyamos este valor, podemos suponer que $s'(x) = x - 1,5$ ya que $s'(1) = -0,5$ y con el resto de resultados del dado, al sustituir, es $s'(a) > 0\ \forall a \in [2,6]$.
Para encontrar la función calculamos su primitiva: $s(x) = \displaystyle\int (x - 1,5)\,dx = \dfrac{x^2}{2} - 1,5x + C$
Podemos elegir $C = 0 \Longrightarrow s(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1,5x$

c) Sea Z número de unos con la función s e Y con la función f.
Tenemos el espacio muestral $\Omega = \{111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000\} \stackrel{\pm}{=} \{3,2,2,2,1,1,1,0\}$.

- ☛ Fernando: $f'(x) = -2\sin 2x$ y tenemos: $f'(1) = -1,82 < 0$, $f'(2) = 1,51$, $f'(3) = 0,56$, $f'(4) = -1,98 < 0$, $f'(5) = 1,09$, $f'(6) = 1,07 \Longrightarrow$ con la función derivada la probabilidad de obtener un uno es $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ y obtener cero es $\dfrac{1}{3}$.

Con la función $f(x) = \cos 2x$ tiene
$P(Y=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $P(Y=2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12}{27}$,
$P(Y=1) = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$ y $P(Y=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

- ☛ Gemma: con la nueva función $s(x) = \frac{x^2}{2} - 1,5x$ la probabilidad de obtener uno es $P(1) = \frac{5}{6}$ y $P(0) = \frac{1}{6}$ y se tiene
  $P(Z=3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$, $P(Z=2) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{75}{216}$,
  $P(Z=1) = 3\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{15}{216}$ y $P(Z=0) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$
- ☛ $P(\text{empate}) =$
  $P(Z=3\cap Y=3) + P(Z=2\cap Y=2) + P(Z=1\cap Y=1) + P(Z=0\cap Y=0) =$
  $\frac{8}{27}\cdot\frac{125}{216} + \frac{12}{27}\cdot\frac{75}{216} + \frac{6}{27}\cdot\frac{15}{216} + \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{216} = \frac{1991}{5832} \simeq 0,3414.$
- ☛ Si Gemma no hubiese cambiado la función, es decir, $g(x) = e^x$ tendríamos $P(1) = 1$ y $P(0) = 0 \Longrightarrow P(Z=3) = 1$ y $P(Z=2) = P(Z=1) = P(Z=0) = 0$.
  $P(\text{empate}) =$
  $P(Z=3\cap Y=3) + P(Z=2\cap Y=2) + P(Z=1\cap Y=1) + P(Z=0\cap Y=0) =$
  $1\cdot\frac{8}{27} + 0\cdot\frac{12}{27} + 0\cdot\frac{6}{27} + 0\cdot\frac{1}{27} = \frac{8}{27} \simeq 0,2963.$
- ☛ Fernando ha conseguido aumentar la probabilidad de empate.

d) Si Fernando hubiese visto la función de Gemma habría elegido una función cuya derivada no tomase valores negativos en los puntos: 1,2,3,4,5 y 6. Por ejemplo $f(x) = x^3 + x$

Problema 2.1.2 (2,5 puntos) Elige entre a y b, respondiendo únicamente uno de los dos.

a) Sean $A(1,2,3)$, $B(1,0,-1)$ y $C(2,2,2)$ tres puntos en el espacio y $\overrightarrow{v_1}$ el vector que va de A a B; $\overrightarrow{v_2}$ el vector que va de B a C y $\overrightarrow{v_3}$ el vector que va de C a A.

   I (1,25 puntos) Estudia si los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

   II (1,25 puntos) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

b) Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{array}\right.$ y además pasa por el punto $(3,2,1)$.

Solución:

a) I $\overrightarrow{v_1} = (1,0,-1)-(1,2,3) = (0,-2,-4)$, $\overrightarrow{v_2} = (2,2,2)-(1,0,-1) = (1,2,3)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1,2,3)-(2,2,2) = (-1,0,1)$.
$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2} \text{ y } \overrightarrow{v_3} \text{ son linealmente dependientes.}$$

   II $\overrightarrow{AB} = (0,-2,-4)$ y $\overrightarrow{AC} = (1,0,-1)$.
$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = |\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(2,-4,2)| = |(1,-2,1)| = \sqrt{6}\ u^2$$

b) $r:\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,1) \\ P_r(-1,2,0) \end{array}\right.$

$$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\Longrightarrow y+z+a=0 \xrightarrow{(3,2,1)\in\pi} 2+1+a=0\Longrightarrow a=-3$$

$$\pi: y+z-3=0$$

Problema 2.1.3 (2,5 puntos) Elige entre a y b, respondiendo únicamente uno de los dos.

a) I (1 punto) Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}\,dx$$

II (1,5 puntos) Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r.

b) I (1 punto) Sea $p(x)=x^3-2x^2+2x$. Calcula, utilizando el cambio de variable $x=1+t$, $\displaystyle\int \frac{dx}{p(x)}$.

II (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{p(x)}$, calcula sus asíntotas, cuando existan, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) I $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}\,dx=$

$$\left[\begin{array}{c} x^3+4x^2+5x=x(x^2+4x+5) \\ \dfrac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4x+5}=\dfrac{A(x^2+4x+5)+(Bx+C)x}{x^3+4x^2+5x} \\ x^2+5x+5=A(x^2+4x+5)+(Bx+C)x \\ x=0\Longrightarrow 5=5A\Longrightarrow A=1 \\ x=1\Longrightarrow 11=10A+B+C\Longrightarrow B+C=1 \\ x=-1\Longrightarrow 1=2A+B-C\Longrightarrow B-C=-1 \\ B=0,\ C=1 \\ \dfrac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2+4x+5} \end{array}\right]=$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+4x+5}\right)dx=\ln|x|+\int\frac{1}{(x+2)^2+1}=\left[\begin{array}{c} t=x+2 \\ dt=dx \end{array}\right]=$$

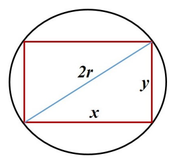
$$\ln|x|+\int\frac{1}{t^2+1}=\ln|x|+\arctan t+C=\ln|x|+\arctan(x+2)+C$$

II $4r^2=x^2+y^2\Longrightarrow y=\sqrt{4r^2-x^2}$

$S(x,y)=x\cdot y\Longrightarrow S(x)=x\sqrt{4r^2-x^2}$

$S'(x)=\sqrt{4r^2-x^2}+x\dfrac{-2x}{2\sqrt{4r^2-x^2}}=\dfrac{2(2r^2-x^2)}{\sqrt{4r^2-x^2}}=0\Longrightarrow$

$x=\pm r\sqrt{2}$ el valor negativo es irrelevante.



	$(0,r\sqrt{2})$	$(r\sqrt{2},\infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función tiene un máximo relativo en $x = r\sqrt{2}\ \ u \Longrightarrow\ y = r\sqrt{2}\ \ u$ con un área de $S(r\sqrt{2}) = 2r^2\ \ u^2$

b) I $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-2x^2+2x} = \left[\begin{array}{c} x=t+1 \\ dx=dt \end{array}\right] = \int \frac{dt}{(t+1)^3-2(t+1)^2+2(t+1)} =$

$$\int \frac{dt}{t^3+t^2+t+1} = \int \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \dfrac{A}{t+1} + \dfrac{Bt+C}{t^2+1} = \dfrac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)} \\ 1 = A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1) \\ t=-1 \Longrightarrow 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2 \\ t=0 \Longrightarrow 1 = A+C \Longrightarrow C = 1/2 \\ t=1 \Longrightarrow 1 = 2A+2B+2C \Longrightarrow B = -1/2 \\ \dfrac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \dfrac{1/2}{t+1} + \dfrac{-(1/2)t+1/2}{t^2+1} \end{array}\right] =$$

$$\int \left(\frac{1/2}{t+1} - \frac{(1/2)t}{t^2+1} + \frac{1/2}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\ln|t^2+1| + \frac{1}{2}\arctan t + C \overset{t=x-1}{=}$$

$$\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|(x-1)^2+1| + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + C$$

II Tenemos: $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3-2x^2+2x}$

- ☛ Asíntotas:
  - Verticales: $x^3-2x^2+2x = 0 \Longrightarrow x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x^3-2x^2+2x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x^3-2x^2+2x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

  - Horizontales: $y=0$ cuando $x\to-\infty$. Cuando $x\to\infty$ no hay.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^3-2x^2+2x} = \left[\frac{1}{-\infty}\right] = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3-2x^2+2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2-4x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x-4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

  - Oblicuas: Cuando $x\to-\infty$ no hay por haber horizontales y cuando $x\to\infty$ tampoco por que $m = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

- ☛ Monotonía: $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)(x^2-4x+2)}{x^2(x^2-2x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 2\pm\sqrt{2}$

	$(-\infty,0)$	$(0,2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2},1)$	$(1,2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2},\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(-\infty,0)\cup(0,2-\sqrt{2})\cup(1,2+\sqrt{2})$ y crece en el $(2-\sqrt{2},1)\cup(2+\sqrt{2},\infty)$

Problema 2.1.4 (2,5 puntos) Elige entre a y b, respondiendo únicamente uno de los dos.

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

I (1,3 puntos) Estudia si existe alguna matriz columna no nula B tal que $A \cdot B = B$. En caso afirmativo, calcula dicha matriz B.

II (1,2 puntos) Sea C una matriz columna no nula tal que $A \cdot C = -C$. Demuestra que también se cumple $A^{-1} \cdot C = -C$.

b) Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Solución:

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

I Sea $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=a \Longrightarrow b=0 \\ b=b \\ -c=c \Longrightarrow c=0 \end{cases} \Longrightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

II $A \cdot C = -C \Longrightarrow A^{-1}AC = A^{-1}(-C) \Longrightarrow C = -A^{-1}C \Longrightarrow A^{-1}C = -C$

b) Sean x el precio sin IVA del artículo A, y del B y z del C.

$\begin{cases} x+2y+5z=483 \\ 100 \cdot 0,04x + 10 \cdot 0,1y + 100 \cdot 0,21z = 1954 \\ z = 4x+8y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y+5z=483 \\ 4x+y+21z=1954 \\ 4x+8y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\text{ €} \\ y = 10\text{ €} \\ z = 92\text{ €} \end{cases}$

Los precios con IVA serían:

- El de A: $3 \cdot 1,04 = 3,12$ €
- El de B: $10 \cdot 1,1 = 11$ €
- El de C: $92 \cdot 1,21 = 111,32$ €

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 4 & 1 & 21 & 1954 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 0 & -7 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & -21 & -1932 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -21z=-1932 \Longrightarrow\ z=92 \\ -7y+92=22 \Longrightarrow\ y=10 \\ x+20+460=483 \Longrightarrow\ x=3 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=10 \\ z=92 \end{array}\right.$$

Capítulo 3

Asturias

3.1. Modelo

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2,5 puntos**.

- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 3.1.1 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Has llegado a la Universidad y decides hacer una fiesta con tus compañeros de clase para conoceros. Para ello debes conseguir dinero. Tres estudiantes del grupo decidís fabricar pulseras, collares y marcapáginas para venderlos e intentar conseguir lo que necesitáis. Para fabricarlas, Luis compra el material necesario para hacer 20 pulseras y 20 collares a juego, Ana el de 30 pulseras, 20 collares y 10 marcapáginas. Para decidir a qué precio se debe vender cada producto miras los tickets de compra, pero sólo pone el precio final, 60 € el ticket de Luis y 90 € el de Ana.

a.1 (1 punto) Plantea un sistema de ecuaciones lineal que modelice el problema y escríbelo matricialmente especificando quién es la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

a.2 (1 punto) Con los datos dados, ¿pueden saber cuánto cuesta el material para producir cada artículo? Luis dice “creo que ha costado 10 € el material para cada marcapáginas” y Ana le dice “eso no puede ser” ¿Quién tiene razón?

a.3 (0,5 puntos) Se venden los collares a 5 € y las pulseras a 4 €. ¿Cuál debe ser el precio de los marcapáginas para que se obtengan exactamente 420 € tras la venta completa?

b) (2,5 puntos) Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b.1 (1,25 puntos) Calcula en caso de que sea posible AB y BA especificando el tamaño y el rango de la matriz resultante.

b.2 (1,25 puntos) Calcula el determinante de A y los valores de x para los cuales existe su inversa. Calcula cuando sea posible $det(A^{-1})$.

Solución:

a) Sean x el gasto para hacer una pulsera, y el de un collar y z el de un marcapáginas.

a.1 $\left\{\begin{array}{l} 20x+20y=60\\ 30x+20y+10z=90 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=2\\ 3x+2y+z=9 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$

a.2 Como $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2=\text{Rango}(\overline{A}) <$ número de incógnitas$\Longrightarrow$
Sistema compatible indeterminado:
$\left\{\begin{array}{l} x+y=2\\ 3x+2y+z=9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=3+\lambda \end{array}\right.$
Si $z=10 \Longrightarrow 3+\lambda=10 \Longrightarrow \lambda=7$ y $x=3-7=-4$ lo cual no puede ser, luego Ana tiene razón.

a.3 Número de pulseras$=20+30=50$, número de collares$=20+20=40$ y número de marcapáginas$=0+10=10 \Longrightarrow 50\cdot 4+40\cdot 5+10x=420 \Longrightarrow x=2$ € es el precio de venta de cada marcapáginas.

b) b.1 $\underset{3\times 3}{A}\cdot\underset{2\times 3}{B}$ no se pueden multiplicar.
$\underset{2\times 3}{B}\cdot\underset{3\times 3}{A}=\underset{2\times 3}{BA}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2x+6\\ 4 & -2 & 2x-6 \end{pmatrix}$
Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2\\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-16\neq 0 \Longrightarrow \text{Rang}(BA)=2$.

b.2 $|A|=2x+12=0 \Longrightarrow x=-6 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-6\}$
$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{2x+12}\ \forall x\in\mathbb{R}-\{-6\}$

Problema 3.1.2 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$

a.1 (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

a.2 (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a.3 (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

b) (2,5 puntos) Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área del mismo. (Ayuda:
la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (a,b) radio r es: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$).

Solución:

a) a.1 $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$
Asíntotas:

☛ Verticales:

- $x = -1$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$
- $x = 1$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

☛ Horizontales: $y = -1$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{1-x^2} = -1$$

☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

a.2 $f'(x) = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decrece $\searrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$	crece $\nearrow$

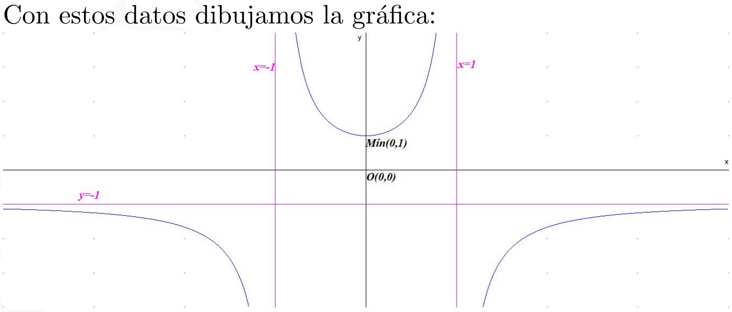
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y creciente en el $(0,1)\cup(1,\infty)$ con un mínimo relativo en el punto $(0,1)$.

$$f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{no hay puntos de inflexión.}$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

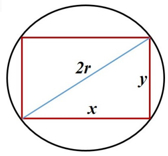
La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ y cóncava $\smile$ en el $(-1,1)$

a.3 Con estos datos dibujamos la gráfica:



b) Tenemos:

$8^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow y = \sqrt{64 - x^2}$
$S(x,y) = xy \Longrightarrow S(x) = x\sqrt{64 - x^2} \Longrightarrow$
$S'(x) = \sqrt{64 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = \dfrac{-2x^2 + 64}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 64 = 0 \Longrightarrow$
$x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$, la solución negativa es irrelevante.



	$(0, 4\sqrt{2})$	$(4\sqrt{2}, \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función tiene un máximo relativo en $x = 4\sqrt{2}$ m con un área de $S(4\sqrt{2}) = 32$ m^2 y con $y = 4\sqrt{2}$ m.

Problema 3.1.3 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \cos^4 x \sin x$

a.1 (1,25 puntos) Calcula una primitiva de f que pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

a.2 (1,25 puntos) Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

b) (2,5 puntos) Dos drones están realizando un vuelo de forma que las alturas de cada uno de ellos viene dado por las funciones $h_1(t) = 36/t$ y $h_2(t) = t^3 + 5t$ de tiempo, con $t \in [1, 4]$.

b.1 (0,5 puntos) Calcula los instantes en los que los dos drones se encuentran a la misma altura.

b.2 (1 punto) Calcula los puntos de máxima altura de los dos.

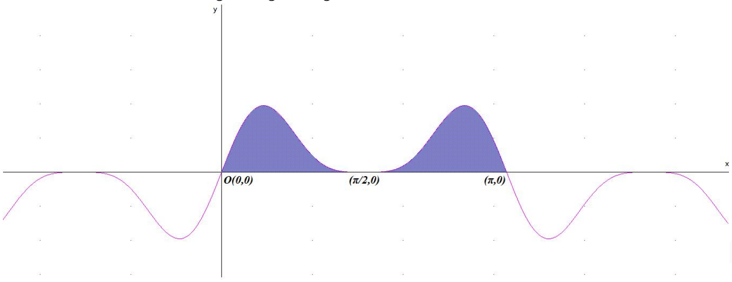
b.3 (1 punto) Calcula el área acotada encerrada entre ambas curvas.

Solución:

a) a.1 $F(x) = \displaystyle\int \cos^4 x \sin x\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ dx = -\dfrac{1}{\sin x} dt \end{array}\right] = \int t^4 \sin x \left(-\dfrac{1}{\sin x}\right) dt = -\int t^4\, dt =$
$-\dfrac{t^5}{5} + C = -\dfrac{\cos^5 x}{5} + C$
$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow F(x) = -\dfrac{\cos^5 x}{5}$

a.2 Comprobamos si hay algún punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[0, \pi]$:
$f(x) = 0 \Longrightarrow \cos^4 x \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$, luego hay dos recintos $S_1 : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $S_2 : \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ con sus áreas correspondientes.
El área total será $S = |S_1| + |S_2|$
$S_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - F(0) = \dfrac{1}{5}$
$S_2 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\, dx = F(\pi) - F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{5}$
Las integrales son positivas por estar la función por encima del eje de abscisas y esta función debe ser tangente a ese eje en el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4\ u^2$



b) b.1 $h_1(t) = h_2(t) \Longrightarrow \frac{36}{t} = t^3 + 5t \Longrightarrow t^4 + 5t^2 - 36 = 0 \Longrightarrow t = \pm 2$ La solución negativa no pertenece al intervalo, luego la solución es $t = 2$.

b.2
- ☛ Si $h_1(t) = \frac{36}{t} \Longrightarrow h_1'(t) = -\frac{36}{t^2} < 0\ \forall t \in [1,4] \Longrightarrow h_1$ es decreciente en todo el intervalo y el valor máximo se produce con $t = 1 \Longrightarrow h_1(1) = 36$
- ☛ Si $h_2(t) = t^3 + 5t \Longrightarrow h_2'(t) = 3t^2 + 5 > 0\ \forall t \in [1,4] \Longrightarrow h_2$ es creciente en todo el intervalo y el valor máximo se produce con $t = 4 \Longrightarrow h_2(4) = 84$

b.3 Las curvas se cortan en $t = 2$ y tendremos dos recintos de integración $S_1 : [1,2]$ y $S_2 : [2,4]$. El área total será: $S = |S_1| + |S_2|$.

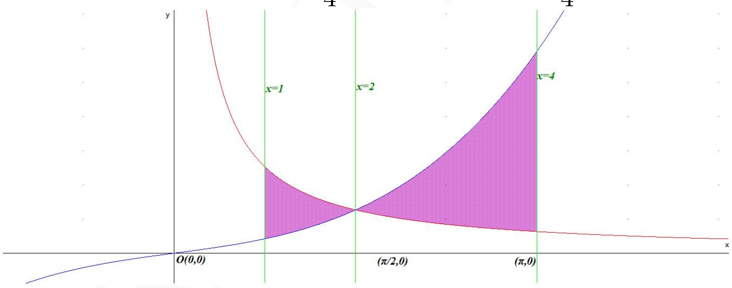
$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{36}{t} - t^3 - 5t\right) dt = 36 \ln|t| - \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}\Big]_1^2 = 36 \ln 2 - \frac{45}{4}$

La integral es positiva al estar la función h_1 por encima de la h_2.

$S_2 = \int_2^4 \left(\frac{36}{t} - t^3 - 5t\right) dt = 36 \ln|t| - \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}\Big]_2^4 = 36 \ln 2 - 90$

La integral es negativa al estar la función h_1 por debajo de la h_2.

$S = |S_1| + |S_2| = 36 \ln 2 - \frac{45}{4} + 90 - 36 \ln 2 = \frac{315}{4} \simeq 78,75\ u^2$



Problema 3.1.4 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A(2,1,3)$ y $B(0,-1,1)$,

a.1 (1,25 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a el.

a.2 (1,25 puntos) Dado el plano $\pi' : x + y + z = 3$, razona valores de y y de z para que $C = (2, y, z) \in \pi'$ y la distancia de C a A sea de 3 unidades.

b) (2,5 puntos) Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$ y el vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$

b.1 (0,75 puntos) Calcula la ecuación continua de la recta r que pasa por P y en la dirección de $\overrightarrow{v}$.

b.2 (0,75 puntos) Calcula las ecuaciones de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q.

b.3 (1 punto) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución:

a) a.1 π es el plano mediador, el lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ tales que

$$d(P,A)=d(P,B)\Longrightarrow |\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|\Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\Longrightarrow \pi: x+y+z=3$$

a.2 $C=(2,y,z)\in\pi': x+y+z=3\Longrightarrow y+z=1$

$|\overrightarrow{AC}|=|(2,y,z)-(2,1,3)|=\sqrt{(y-1)^2+(z-3)^2}=3\Longrightarrow (y-1)^2+(z-3)^2=9\xrightarrow{z=1-y}$

$(y-1)^2+(-y-2)^2=9\Longrightarrow 2(y^2+y-2)=0\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2\Longrightarrow z=3\Longrightarrow C_1(2,-2,3)\\ y=1\Longrightarrow z=0\Longrightarrow C_2(2,1,0)\end{array}\right.$

b) (2,5 puntos) Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$ y el vector $\overrightarrow{v}=(1,-1,1)$

b.1 $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v}=(1,-1,1)\\ P_r=P(1,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

b.2 Seguimos el siguiente método:

- ☛ Calculamos un plano $\pi'\perp r$ tal que $Q\in\pi'$:
  $\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\Longrightarrow x-y+z+K=0\xrightarrow{Q\in\pi'}2+K=0\Longrightarrow K=-2\Longrightarrow$
  $$\pi': x-y+z-2=0$$
- ☛ Calculamos el punto Q' de corte de π' con $r\Longrightarrow (1+\lambda)-(1-\lambda)+(1+\lambda)-2=0\Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{3}\Longrightarrow Q'\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\dfrac{4}{3}\right)$
- ☛ La recta s pasa por Q y Q':
  $s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{QQ'}=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\dfrac{4}{3}\right)-(1,0,1)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}(1,2,1)\\ P_s=Q(1,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow$
  $$s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

b.3 $\pi'':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,1)\\ P_s(1,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi'':\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-3x+3z=0\Longrightarrow \pi'': x-z=0$

Problema 3.1.5 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

a) (2,5 puntos) Estás jugando a un juego online consistente en lanzar bolas a una diana. El juego te asigna un personaje al azar de 10 posibles, 4 de ellos son azules y los 6 restantes rojos. La probabilidad de que un personaje azul dé en la diana es 0,95, mientras que si el personaje es rojo es de 0,65.

a.1 (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes?

a.2 (1,25 puntos) Haces un lanzamiento y aciertas en la diana, ¿qué es más probable que tengas un personaje azul o rojo?

b) (2,5 puntos) En una comunidad autónoma se pretende medir el nivel de conocimientos en matemáticas de estudiantes de cuarto de ESO. Para ello se realiza un examen tipo test con 100 preguntas y en cada una de ellas debe decidirse si la afirmación es verdadera o falsa. Un estudiante decide responder al azar a todas las preguntas.

b.1 (0,75 puntos) Comprueba que el número de respuestas acertadas puede ser aproximada por una distribución normal y decide los parámetros que la describen.

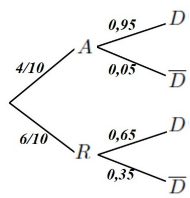
b.2 (0,75 puntos) Utilizando la aproximación anterior, calcula la probabilidad de que un estudiante que haya respondido al azar obtenga más de un 6, es decir, que tenga al menos 60 aciertos.

b.3 (1 punto) Supongamos que se reduce el número de preguntas del examen a 10. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte 5 preguntas.

Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0,5$, $F(0,5) = 0,6915$, $F(0,6915) = 0,7549$, $F(2) = 0,9772$, $F(1,9) = 0,9713$, $F(0,34) = 0,6331$, $F(0,35) = 0,6455$, $F(0,9772) = 0,8340$.
En caso de que tu valor no coincida con los mostrados, toma el más cercano.

Solución:

a) Sean A personaje azul, R personaje rojo, D acierta en la diana y $\overline{D}$ no acierta en la diana.



a.1 $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|R)P(R) = 0,95 \cdot \dfrac{4}{10} + 0,65 \cdot \dfrac{6}{10} = 0,77$

a.2 $P(A|D) = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0,95 \cdot \frac{4}{10}}{0,77} = 0,4935$
$P(R|D) = 1 - P(A|D) = 0,5065$
Es más probable que el personaje sea rojo.

b) $B(100; 0,5)$

b.1 Como $n \ge 30$, $np = 100 \cdot 0,5 = 50 \ge 5$ y $nq = 100 \cdot 0,5 = 50 \ge 5$ tenemos:

$$B(100; 0,5) \overset{N\left(np, \sqrt{npq}\right)}{\approx} N\left(50; 5\right)$$

b.2 $P(X \ge 60) = P\left(Z \ge \dfrac{59,5 - 50}{5}\right) = P(Z \ge 1,9) = 1 - P(Z \le 1,9) = 1 - 0,9713 = 0,0287$

b.3 Ahora tenemos $B(10; 0,5)$:
$P(X = 10) = \dbinom{10}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^5 = 0,24609375$

Capítulo 4

Cantabría

4.1. Modelo

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, debe responder solo a una de las opciones. Si realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 4.1.1 (2,5 puntos) (Bloque A+D) Resuelva una de las siguientes cuestiones (a o b):

a) (2,5 puntos) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

I (1 punto) Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

II (0,5 punto) Calcule $C - 3B$.

III (1 punto) Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$

b) (2,5 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

I (1,25 punto) $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

II (1,25 punto) $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Solución:

a) I $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

II $C - 3B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

III $AX + 3B = C \Longrightarrow AX = C - 3B \Longrightarrow X = A^{-1}(C - 3B) =$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -5 & 11 & -8 \\ 10 & -11 & 3 \end{pmatrix}$

I Si $a = 2 \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

II Si $a = 2 \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 10 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema Incompatible (no tiene solución)

Problema 4.1.2 (2,5 puntos)(Bloque B) Resuelva una de las siguientes cuestiones (a o b):

a) (2,5 puntos) Considere la siguiente función definida a trozos
$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si} & x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9) & \text{si} & x > 3 \end{array} \right.$
donde ln denota al logaritmo neperiano.

I (0,5 puntos) Determine el dominio de definición de $f(x)$.

II (0,75 puntos) Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

III (0,5 puntos) Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

IV (0,75 puntos) Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

b) (2,5 puntos) Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

I (0,5 puntos) Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

II (1 punto) Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

III (1 punto) Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

a) I La primera rama es un polinomio y su dominio será $(-\infty, 3]$ y por el logaritmo $x^2-9 > 0 \Longrightarrow (3,\infty) \Longrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

II $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^3-6x^2+9x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\ln(x^2-9) = -\infty \\ f(3) = 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)}$$

f discontinua no evitable con un salto infinito en $x = 3$.
La función f es continua en $\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$

III Cortes con el eje de abscisas:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^3-6x^2+9x = 0 \Longrightarrow (0,0) \text{ y } (3,0) & \text{si} & x \le 3 \\ \ln(x^2-9) = 0 \Longrightarrow x^2-9 = 1 \Longrightarrow (\sqrt{10}, 0) \text{ y } (-\sqrt{10}, 0)(\text{no válida}) & \text{si} & x > 3 \end{array}\right.$$

Corte con el eje de ordenadas: $(0,0)$

IV La rama $x \le 3$ no tiene asíntotas por ser un polinomio.
La rama $x > 3$:

- Verticales: $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x^2-9) = -\infty$
- Horizontales: No hay. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2-9) = \infty$
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-9)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-9}}{1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

b) I $f'(x) = -\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

El dominio de f es $\mathbb{R}$ ya que el denominador de la función no se anula nunca, luego el intervalo en el que es decreciente es $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.

II $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
La función es cóncava $\smile$ en el $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$
Nota:"cóncavo, va" Del lat. concavus adj. Curvado hacia dentro, como el interior de un cuenco. (RAE)

III (1 punto) Los puntos de inflexión son aquellos en los que cambia la curvatura de la función: $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Problema 4.1.3 (2,5 puntos)(Bloque C) Considere el punto $P(1,5,0)$ y la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{array} \right.$

a) (0,75 puntos) Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P.

b) (1,25 puntos) Considere un punto P' en r y un vector dirección de r. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

c) (0,5 punto) Calcule la distancia entre P y r.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ P_r(0,2,-1) \end{array} \right.$$

a) $s \parallel r$ tal que $p \in s \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ P_s=P(1,5,0) \end{array} \right. \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x=1+\mu \\ y=5-\mu \\ z=2\mu \end{array} \right. \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

b) Sea $P'=P_r(0,2,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{P'P}=(1,5,0)-(0,2,-1)=(1,3,1)$

$S=|\overrightarrow{P'P} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = |(7,-1,-4)| = \sqrt{49+1+16} = \sqrt{66}\ u^2$

c) $d(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{P'P} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \dfrac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11}\ u^2$

Problema 4.1.4 (2,5 puntos)(Bloque E) Resuelva una de las siguientes cuestiones (a o b):

a) (2,5 puntos) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5 % de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.

I (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

II (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

III (1,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

b) (2,5 puntos) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

I (0,5 puntos) Calcule la $P(A \cap B)$.

II (0,75 puntos) Razone si A y B son independientes.

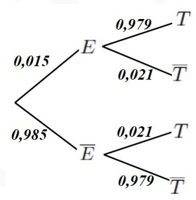
III (0,5 puntos) Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B.

IV (0,75 puntos) Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A.

Solución:

a) Sean E enfermos, $\overline{E}$ no enfermos, T test positivo y $\overline{T}$ test negativo.

I $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0,015 = 0,985$



II $P(T|E) = 0,979$

III $P(T) = P(T|E)P(E) + P(T|\overline{E})P(\overline{E}) =$
$0,979 \cdot 0,015 + 0,021 \cdot 0,985 = 0,03537$
$P(E|T) = \dfrac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \dfrac{0,979 \cdot 0,015}{0,03537} = 0,4152$

b) (2,5 puntos) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

I $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,8 + 0,5 - 1 = 0,3$.

II $P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4 \neq P(A \cap B) = 0,3$ luego A y B no son independientes.

III $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0,5 = 0,5$

IV $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 1 = 0$.

Capítulo 5

Castilla-León

5.1. Modelo

INDICACIONES:

a) **OPTATIVIDAD:** El alumno deberá escoger cuatro ejercicios completos según se indica en cada apartado. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 4 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

b) **CALCULADORA:** Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN:
Los 4 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Problema 5.1.1 (2,5 puntos) Elige entre a y b, respondiendo únicamente uno de los dos.

a) I (1,5 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$

II (1 puntos) Resolverlo para $a = 1$.

b) I (1,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$.

II Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = -3$, calcular el determinante de $4M$ y el determinante de $(2M)^{-1}$.

Solución:

a) I Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre compatible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix},\ |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1 \text{ y } a = 2.$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. Su solución sería la trivial $x = y = z = 0$.
- ☛ Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- ☛ Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

II Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

b) I $\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} = \underset{2\times 2}{AB} \Longrightarrow$ todas las matrices de la ecuación son de orden 2. Además $|C| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists C^{-1}$ por lo que podemos despejar X de la ecuación planteada:

$AB + CX = D \Longrightarrow CX = D - AB \Longrightarrow X = C^{-1}(D - AB) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II $|M| = -3 \xrightarrow{\text{Orden 2}} |4M| = 4^2|M| = 16(-3) = -48$

$$|(2M)^{-1}| = \frac{1}{|2M|} = \frac{1}{2^2|M|} = -\frac{1}{12}.$$

Problema 5.1.2 (2,5 puntos) Es obligatorio contestar los tres apartados a, b y c.

a) (1 punto) Dada la función $f(x) = e^{-x}(x - 1)$, determinar su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

b) (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[1,3]$.

c) (0,5 puntos) Demostrar que la función $g(x) = 2x + \sin x$ se anula en un único punto.

Solución:

a) Sea $f(x) = e^{-x}(x-1)$ y $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Asíntotas verticales no tiene pero sí horizontal en $y = 0$ cuando tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}(x-1)\right) \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty}\left(e^{t}(-t-1)\right) = -\infty$$

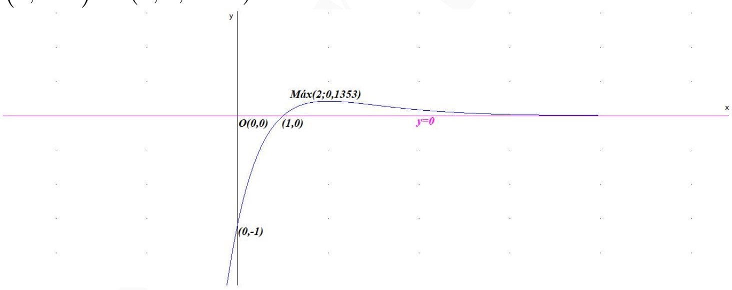
Asíntotas oblicuas cuando $x \to +\infty$ no hay por haber horizontales y cuando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{xe^x}\right) \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{e^t(t+1)}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{e^t(t+2)}{1} = \infty$$

Luego no hay asíntotas oblicuas.
Monotonía:
$f'(x) = e^{-x}(2-x) = 0 \Longrightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

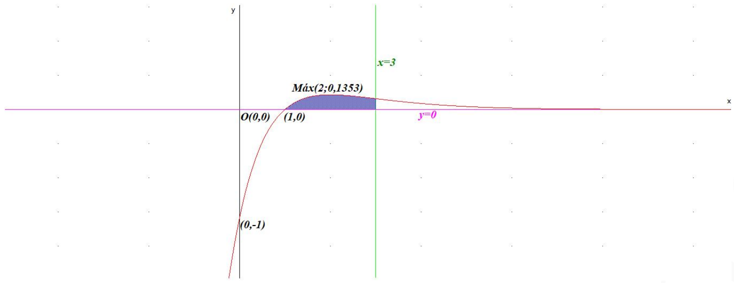
La función crece en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $\left(2; e^{-2}\right) \simeq (2; 0,1353)$.



b) La función corta al eje de abscisas en el punto $f(x) = e^{-x}(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$, luego no corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $(1,3)$ y sólo habrá un recinto de integración en el que la función está por encima del eje de abscisas. La integral saldrá positiva.

$$F(x) = \int e^{-x}(x-1)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x-1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] = -e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}\,dx =$$

$-e^{-x}(x-1) - e^{-x} + C = -xe^{-x} + C$ $S = \int_1^3 e^{-x}(x-1)\,dx = F(3) - F(1) = \dfrac{e^2-3}{e^3} \simeq 0,2185\ u^2$



c) La función g es continua en $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty}(2x+\sin x)=-\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}(2x+\sin x)=+\infty$.
Por el teorema de Bolzano $\exists c\in(-\infty,+\infty)$ tal que $f(c)=0$.
Por otro lado $g'(x)=2+\cos x>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Longrightarrow g$ es siempre creciente, luego sólo puede cortar al eje de abscisas en un punto, el punto c es único.

Problema 5.1.3 (2,5 puntos) Elige entre a y b, respondiendo únicamente uno de los dos.

a) Sean las rectas $r:\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=\alpha\\ z=\alpha\end{array}\right.$ y $s:\left\{\begin{array}{l} x-z=3\\ y-3z=4\end{array}\right.$

I (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y s.

II (1 punto) Hallar el punto simétrico a $P(1,0,1)$ respecto de la recta r.

III (0,5 punto) Calcular el plano que contiene a la recta s y al punto $P(1,0,1)$.

b) Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.

I (1 punto) Calcular el área del paralelogramo.

II (1 punto) Hallar la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.

III (0,5 punto) Calcular las coordenadas del vértice D.

Solución:

a) $r:\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=\alpha\\ z=\alpha\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right.$

$s:\left\{\begin{array}{l} x-z=3\\ y-3z=4\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=3+\lambda\\ y=4+3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.\Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,3,1)\\ P_s(3,4,0)\end{array}\right.$

I $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,4,0)$

$[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix} 2&4&0\\ 0&1&1\\ 1&3&1\end{vmatrix}=0$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{pmatrix}=\text{Rango}\begin{pmatrix}0&1&1\\ 1&3&1\end{pmatrix}=2\Longrightarrow r$ y s se cortan.

II Seguimos el siguiente método:

- Calculamos un plano $\pi\perp r$ tal que $P\in\pi$:
$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\Longrightarrow\pi:y+z+k=0\xrightarrow{P\in\pi}1+k=0\Longrightarrow k=-1\Longrightarrow\pi:$ $y+z-1=0$.
- Calculamos el punto de corte P' de r con π:
$\alpha+\alpha-1=0\Longrightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow P'\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

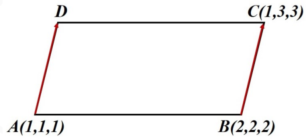
☛ El punto P' es el punto medio entre P y el buscado P'':
$$\frac{P+P''}{2}=P'\Longrightarrow P''=2P'-P=(2,1,1)-(1,0,1)=(1,1,0)$$

III $\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{PP_s}=(2,4,-1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,3,1)\\ P(1,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi':\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=7x-3y+2z-9=0$

b) $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$:

I $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)-(1,1,1)=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,3,3)-(1,1,1)=(0,2,2)$

$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}|=|(0,-2,2)|=2\sqrt{2}\ u^2$



II $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,-2,2)\Longrightarrow \pi:-2y+2z+k=0\xrightarrow{A\in\pi}-2+2+k=0\Longrightarrow$
$k=0\Longrightarrow \pi:-2y+2z=0\Longrightarrow y-z=0$

III $D=A+\overrightarrow{AD}=A+\overrightarrow{BC}=(1,1,1)+(-1,1,1)=(0,2,2)$

Problema 5.1.4 (2,5 puntos) Elige entre a y b, respondiendo únicamente uno de los dos.

a) En las pruebas de acceso a la universidad, las notas que se han obtenido por 1000 estudiantes han seguido una distribución normal de media 6,05 y desviación típica 2,5.

I (1,25 puntos) ¿Cuántos estudiantes han superado el 7? Razona la respuesta.

II (1,25 puntos) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte.

b) En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70 % de las personas que entran son mujeres y que el 40 % de los hombres y el 30 % de las mujeres que entran son menores de 30 años.

I (0,5 puntos) Indicar las probabilidades que aparecen en el enunciado utilizando una notación adecuada.
Si se escoge una persona al azar, calcula:

II (0,5 puntos) La probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años.

III (0,75 punto) La probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años.

IV (0,75 punto) Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Solución:

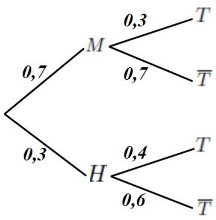
a) $N(6,05;2,5)$

I $P(X\geq 7)=P\left(Z\geq\dfrac{7-6,05}{2,5}\right)=P(Z\geq 0,38)=1-P(Z\leq 0,38)=$
$1-0,6480=0,3519$
$1000\cdot P(X\geq 7)=1000\cdot 0,3519=351,9\simeq 352$ alumnos.

II $P(X \geq a) = \dfrac{330}{1000} = 0,33 \Longrightarrow P\left(Z \geq \dfrac{a-6,05}{2,5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-6,05}{2,5}\right) = 0,33 \Longrightarrow$
$P\left(Z \leq \dfrac{a-6,05}{2,5}\right) = 0,67 \Longrightarrow \dfrac{a-6,05}{2,5} = 0,44 \Longrightarrow a = 7,15$ nota de corte.

b) Sean M mujer, H hombre, T menor de 30 años y $\overline{T}$ mayor de 30 años.

I $P(M) = 0,7$, $P(H) = 1 - P(M) = 0,3$, $P(T|H) = 0,4$ y $P(T|M) = 0,3$



II $P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|H)P(H) =$
$0,3 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,33$

III $P(H \cap \overline{T}) = P(\overline{T}|H)P(H) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$

IV $P(H|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|H)P(H)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,6 \cdot 0,3}{1 - 0,33} = 0,2687$

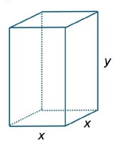
Capítulo 6

Castilla-La Mancha

6.1. Modelo

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4 deberá contestar solamente a UNO de los dos apartados propuestos**. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

Problema 6.1.1 (2,5 puntos) Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



a) (1 punto) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).

b) (1 punto) Calcula, razonadamente, los valores de x e y para que la superficie sea mínima.

c) (0,5 puntos) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2.

Solución:

a) $V = x^2y = 1 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{x^2}$

$$S(x,y) = 2x^2 + 4xy \Longrightarrow S(x) = 2x^2 + 4x\frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x} \Longrightarrow S(x) = \frac{2(x^3+2)}{x}$$

b) $S'(x) = \dfrac{4(x^3-1)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función S es decreciente en el intervalo $(0,1)$ y creciente en el $(1,\infty)$ por lo que hay un mínimo relativo en $x=1$.

La superficie sería mínima cuando $x = 1$ dm e $y = \dfrac{1}{1^2} = 1$ dm.

c) La superficie mínima sería $S(1) = 6$ dm^2 con un coste de $5\cdot 6 = 30$ €

Problema 6.1.2 (2,5 puntos) **Contesta solamente a uno de los apartados, el a o el b**

a) (2,5 puntos) Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a.1 (1 punto) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

a.2 (0,5 puntos) ¿Cuál es la longitud de la viga?

a.3 (1 punto) Se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

b) (2,5 puntos) Resuelve los problemas siguientes:

b.1 (1,25 punto) Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1,a,a)$ y $\overrightarrow{v} = (-1,0,2)$, con $a\in\mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sea de $60°$.

b.2 (1,25 puntos) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u} = (1,2,1)$ y $\overrightarrow{v} = (1,0,0)$.

Solución:

a) a.1 $r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,4,5)-(2,-1,3) = (-4,5,2) \\ P_r = A(2,-1,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = 2-4\lambda \\ y = -1+5\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

a.2 $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-4,5,2)| = \sqrt{(-4)^2+5^2+2^2} = 3\sqrt{5}\ u$

a.3 Sean $\overrightarrow{CA} = (2,-1,3)-(0,0,1) = (2,-1,2)$ y $\overrightarrow{CB} = (-2,4,5)-(0,0,1) = (-2,4,4)$

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 4\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|6(-2,-2,1)| = 9\ u^2$$

b) b.1 $\cos 60° = \dfrac{(1,a,a)\cdot(-1,0,2)}{\sqrt{2a^2+1}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{-1+2a}{\sqrt{5(2a^2+1)}} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 2(-1+2a) = \sqrt{5(2a^2+1)} \Longrightarrow$

$4(-1+2a)^2 = 5(2a^2+1) \Longrightarrow 6a^2-16a-1 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{8\pm\sqrt{70}}{6}$.

Si $a = \dfrac{8-\sqrt{70}}{6} \simeq -0,0611 \Longrightarrow$ el producto escalar es negativo y esta solución no sería válida

La solución válida es $a = \dfrac{8+\sqrt{70}}{6}$

b.2 $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -2) \\ P_r = A(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 6.1.3 (2,5 puntos) **Contesta solamente a uno de los apartados, el a o el b**

a) (2,5 puntos) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

a.1 (1,5 puntos) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2 (1 punto) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

b) (2,5 puntos) Resuelve los problemas siguientes:

b.1 (1,25 puntos) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$

b.2 (1,25 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuales. Justifica tu respuesta.

Solución:

a) a.1

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = a^2 - 7a + 10 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ a = 5$$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{2, 5\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

- ☛ Si $a = 5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

a.2 Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) b.1 $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3\ \forall a \in \mathbb{R}$

b.2 $|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R}$
$A = A^{-1} \Longrightarrow A \cdot A = A \cdot A^{-1} \Longrightarrow A^2 = I \Longrightarrow$
$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 0$

Problema 6.1.4 (2,5 puntos)**Contesta solamente a uno de los apartados, el a o el b**

a) (2,5 puntos) Resuelve los problemas siguientes:

a.1 (1 punto) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,2$; $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cup B) = 0,3$. Calcula:

- ☛ (0,5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap \overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.
- ☛ (0,5 puntos) $P(A|B)$ y $P(B|A)$.

a.2 (1,5 puntos) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

- ☛ (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?
- ☛ (0,75 puntos) Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?
  En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

b) (2,5 puntos) Resuelve los problemas siguientes:

b.1 (1,25 puntos) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y, el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican el golf.

- ☛ (0,5 puntos) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.
- ☛ (0,75 puntos) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b.2 (1,25 puntos) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

- ☛ (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?
- ☛ (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

Solución:

a) a.1 ☛ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,3 = 0,2 + P(B) - 0,1 \Longrightarrow P(B) = 0,2$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,1 = 0,1$

☛ $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

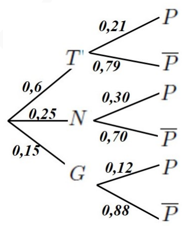
a.2 Sea V tiene un punto verde, R tiene un punto rojo:

$$P(V) = \frac{11}{40},\ \ P(R) = \frac{12}{40} \ \text{ y } \ P(V \cap R) = \frac{7}{40}$$

- ☛ $P(VV) = \dfrac{11}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{11}{156} \simeq 0,0705$
- ☛ $P(R|V) = \dfrac{P(V \cap R)}{P(V)} = \dfrac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \dfrac{7}{11} \simeq 0,6364$

b) b.1 Sean T juega al tenis, N practica la natación, G juega al golf, P consigue algún premio y $\overline{P}$ no consigue ningún premio.

- ☛ $P(P) = P(P|T)P(T) + P(P|N)P(N) + P(P|G)P(G) =$ $0,6 \cdot 0,21 + 0,25 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,12 = 0,219$
- ☛ $P(N|P) = \dfrac{P(P|N)P(N)}{P(P)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,3}{0,219} = 0,3425$



b.2 $N(60, 8)$

- ☛ $P(X \leq 50) = P\left(Z \leq \dfrac{50-60}{8}\right) = P(Z \leq -1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) =$ $1 - 0,8944 = 0,1056$
- ☛ $P(50 \leq X \leq 66) = P\left(\dfrac{50-60}{8} \leq Z \leq \dfrac{66-60}{8}\right) = P(-1,25 \leq Z \leq 0,75) =$ $P(Z \leq 0,75) - P(Z \leq -1,25) = P(Z \leq 0,75) - (1 - P(Z \leq 1,25)) =$ $0,7734 - 0,1056 = 0,6678.$

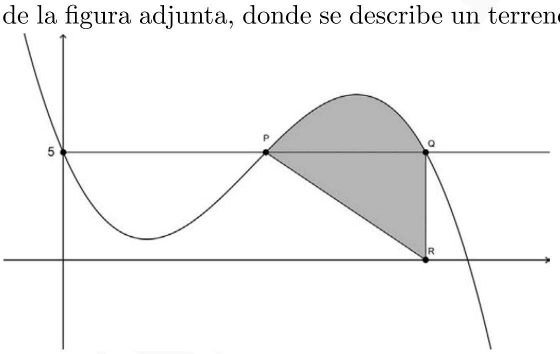
Capítulo 7

Cataluña

7.1. Modelo

Responda a **CUATRO** de las seis cuestiones siguientes. Observe que en la pregunta 4 debe elegir sólo una de las dos **OPCIONES A o B**. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.
Cada cuestión vale 2,5 puntos. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara. En su defecto, se puede descontar hasta un máximo de 0,25 puntos del valor de la pregunta.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.
Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Problema 7.1.1 (2,5 puntos) Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) (1,25 puntos) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P, Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR.

b) (1,25 puntos) Calcule la superficie del terreno.

Solución:

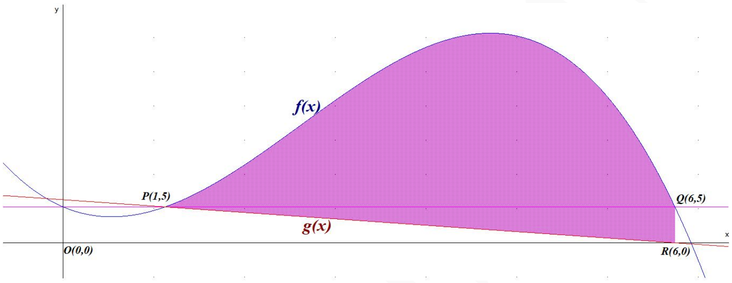
a) $f(x) = 5 \Longrightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \Longrightarrow x = 0$, $x = 1$ y $x = 6 \Longrightarrow P(1, f(1)) = P(1, 5)$, $Q(6, f(6)) = Q(6, 5)$ y $R(6, 0)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{RP} = (1,5) - (6,0) = (-5,5) = -5(1,-1) \\ P_r = R(6,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{x-6}{1} = \frac{y-0}{-1} \Longrightarrow y = -x + 6$$

b) Se trata de calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = -x + 6$ entre P y R, es decir entre $x = 1$ y $x = 6$ $P(1, 5)$ y $R(6, 0)$ con la gráfica de la función f por encima de la de g:

$$S = \int_1^6 (f(x) - g(x))\, dx = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 + x - 6)\, dx = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1)\, dx =$$

$$-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - x \Big]_1^6 = \frac{1025}{12} \simeq 85,4167\ u^2$$



Problema 7.1.2 (2,5 puntos) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right.$$

donde k es un parámetro real.

a) (1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k, y resuélvalo para $k = 0$.

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema para $k = -1$.

c) (1,25 puntos) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta.

Solución:

a) $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -6(k+1) = 0 \Longrightarrow k = -1$$

- ☛ Si $k \in \mathbb{R} - \{-1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 - F_1 \\ 4F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

- Si $k=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y-z=4 \\ x-y=3 \\ 3x+3y=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3} \\ y=-\dfrac{4}{3} \\ z=0 \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 4F_2-F_1 \\ 4F_3-3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4z=0 \Longrightarrow z=0 \\ -6y-0=8 \Longrightarrow y=-\dfrac{4}{3} \\ 4x-\dfrac{8}{3}-0=4 \Longrightarrow x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

b) Si $k=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y-z=4 \\ -6y-3z=8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c) Para $k=-1$ bastaría modificar el término independiente de la tercera ecuación por un valor cualquiera, por ejemplo cero:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+2y-z=4 \\ x-y=3 \\ 3x+3y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 4F_2-F_1 \\ 4F_3-3F_1 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 6 & 3 & -12 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

sistema incompatible (no tiene solución)

Problema 7.1.3 (2,5 puntos) Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.

B A Y E S F A N S

a) (0,75 puntos) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda). Calcule la probabilidad de que las dos bolas tengan letras diferentes.

b) (0,75 puntos) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente). Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A.

c) (1 punto) Estudie los máximos y los mínimos, y las zonas de crecimiento y de decrecimiento, de la función $f(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$, definida para $x > 0$.

Solución:

a) $P(\text{diferentes}) = 1 - P(\text{iguales}) = 1 - (P(AA) + P(SS)) = 1 - \left(\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{17}{18}$

b) $B\left(5, \dfrac{2}{9}\right)$ y $q = \dfrac{7}{9}$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$
$1 - \left(\binom{5}{0}\left(\dfrac{2}{9}\right)^0\left(\dfrac{7}{9}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\dfrac{2}{9}\right)^1\left(\dfrac{7}{9}\right)^4\right) = 0,30876$

c) Tenemos $\text{Dom}(f) = (0, \infty)$ y $f'(x) = 2\dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Longrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longrightarrow \ln x = 1 \Longrightarrow x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, e)$ y decreciente en el (e, ∞) con un máximo relativo en el punto $\left(e, \dfrac{2}{e}\right)$

Problema 7.1.4 (2,5 puntos) **Elegir una de las dos opciones a o b**

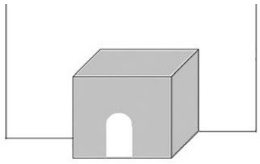
a) (2,5 puntos) Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

a.1 (1 punto) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B. Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B, es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.

a.2 (0,75 puntos) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta.

a.3 (0,75 puntos) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área.

b) (2,5 puntos) Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



b.1 (1,25 puntos) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \dfrac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros.

b.2 (1,25 puntos) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste?

Solución:

a) a.1 El punto medio entre A y B es $M(-1,0,3)$

$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(-4,-4,0)=-4(1,1,0)\\ P_r=A(1,2,3)\end{cases}\Longrightarrow$

$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,0)\Longrightarrow \pi: x+y+\lambda=0 \xrightarrow{M\in\pi} \lambda=1\Longrightarrow \pi: x+y+1=0$

Se trata de un plano mediador entre los puntos A y B comprobamos que se cumple $d(P,A)=d(P,B)$:

$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|\Longrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}\Longrightarrow$$

$$x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z+14=x^2+6x+y^2+4y+z^2-6z+22\Longrightarrow -8x-8y-8=0\Longrightarrow$$

$$\pi: x+y+1=0$$

a.2 $d(A,\pi)=\dfrac{|1+2+1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\ u$

$d(B,\pi)=\dfrac{|-3-2+1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\ u$

Como se vio en el apartado anterior π es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambos puntos, dicho de otra manera, se trata del plano mediador.

a.3 Tenemos

$\overrightarrow{CA}=(1,2,3)-(-7,6,3)=(8,-4,0)\Longrightarrow |\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{5}$

$\overrightarrow{CB}=(-3,-2,3)-(-7,6,3)=(4,-8,0)\Longrightarrow |\overrightarrow{CA}|=4\sqrt{5}$

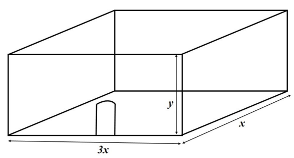
$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,3)-(1,2,3)=(-4,-4,0)\Longrightarrow |\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{2}$

El triángulo tiene dos lados iguales y el otro desigual, luego se trata de un triángulo isósceles.

$$S_t=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\8&-4&0\\4&-8&0\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(0,0,-48)|=24\ u^2$$

b) b.1 Tenemos:

$V(x,y)=3x^2y=6\Longrightarrow y=\dfrac{2}{x^2}$



Coste de las paredes: $30(3xy+xy+xy)=150xy$ €

Coste del techo: $50\cdot 3x^2=150x^2$ €

Coste de la puerta: 35 €

Luego: $C(x,y)=150xy+150x^2+35\Longrightarrow$

$C(x)=150x\cdot\dfrac{2}{x^2}+150x^2+35=\dfrac{300}{x}+150x^2+35$

b.2 $C'(x)=-\dfrac{300}{x^2}+300x=0\Longrightarrow x=1$

	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$C'(x)$	$-$	$+$
$C(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,1)$ y creciente en el $(1,\infty)$ con un mínimo relativo en $x=1$ m de profundidad, 3 m de ancho y una altura de $y=\dfrac{2}{1}=2$ m. El coste mínimo sería de $C(1)=485$ €

Capítulo 8

Comunidad Valenciana

8.1. Modelo

BAREMO DEL EXAMEN: Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.
A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto.
Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.

Problema 8.1.1 PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)
Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: tomates, pimientos y calabacines. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: control biológico, pesticidas químicos y métodos orgánicos. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El 50 % del área está dedicada a tomates, el 30 % a pimientos y el 20 % a calabacines.
- Para los tomates, la finca utiliza control biológico en el 40 % de la finca, pesticidas químicos en el 30 % y métodos orgánicos en el 30 %.
- Para los pimientos, la finca utiliza control biológico en el 30 %, pesticidas químicos en el 40 % y métodos orgánicos en el 30 %.
- Para los calabacines, se utiliza control biológico en el 20 %, pesticidas químicos en el 50 % y métodos orgánicos en el 30 %.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los tomates:
  - El control biológico tiene un 85 % de efectividad.
  - Los pesticidas químicos tienen un 95 % de efectividad.
  - Los métodos orgánicos tienen un 80 % de efectividad.
- Para los pimientos:

- El control biológico tiene un 80 % de efectividad.
- Los pesticidas químicos tienen un 90 % de efectividad.
- Los métodos orgánicos tienen un 75 % de efectividad.

☛ Para los calabacines:

- El control biológico tiene un 70 % de efectividad.
- Los pesticidas químicos tienen un 85 % de efectividad.
- Los métodos orgánicos tienen un 65 % de efectividad.

Responda a todos los apartados

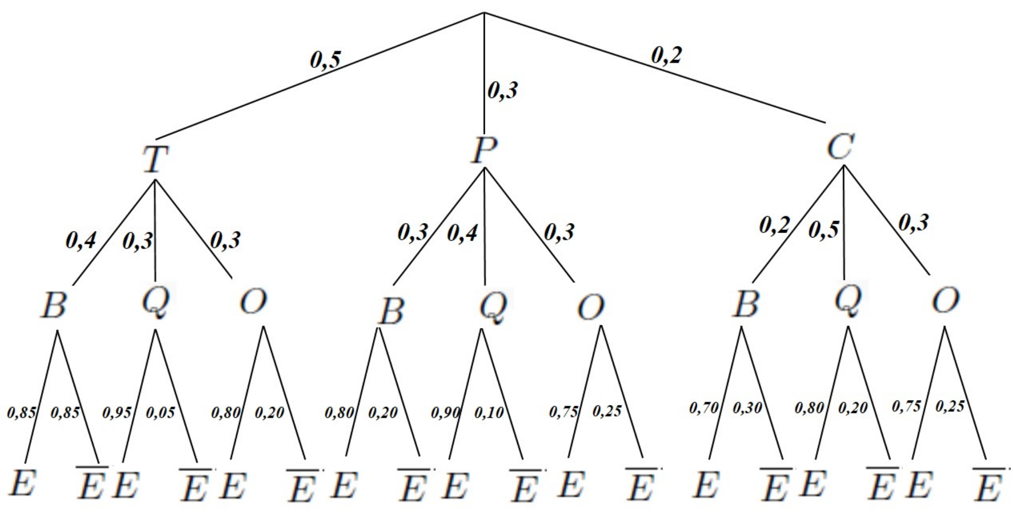
a) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

b) (0,75 puntos) Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?

c) (1 punto) Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución:

Sean T tomate, P pepino, C calabacín, B control biológico, Q pesticidas químicos, O métodos orgánicos, E efectividad y $\overline{E}$ sin efectividad.



a) $P(E) = P(E|B)P(B|T)P(T) + P(E|Q)P(Q|T)P(T) + P(E|O)P(O|T)P(T)+$
$P(E|B)P(B|P)P(P) + P(E|Q)P(Q|P)P(P) + P(E|O)P(O|P)P(P)+$
$P(E|B)P(B|C)P(C) + P(E|Q)P(Q|C)P(C) + P(E|O)P(O|C)P(C) =$
$0,85 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + 0,95 \cdot 0,3 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,5+$
$0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,3 \cdot 0,3+$
$0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,2 + 0,75 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,833$

b) $P(P|E) = \dfrac{P(E|P)P(P)}{P(E)} =$
$\dfrac{P(E|B)P(B|P)P(P) + P(E|Q)P(Q|P)P(P) + P(E|O)P(O|P)P(P)}{P(E)} =$
$\dfrac{0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,4 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,3 \cdot 0,3}{0,833} = 0,2971$

c) $P(E|O \cap T) = 0,8 \Longrightarrow B(11; 0,8)$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - \left[\binom{11}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{11} + \binom{11}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{10} + \binom{11}{2} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^9\right] = 0,999981056 \simeq 1$

Problema 8.1.2 ÁLGEBRA (2,5 puntos)
Responda al apartado a o b

a) Responda a todos los subapartados siguientes:
Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{array}\right.$$

donde a es un parámetro real. Obtener:

a.1 (1,25 puntos) Discutir del sistema en función del parámetro a.

a.2 (1,25 puntos) Las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

b) Responda a todos los subapartados siguientes:
Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

b.1 (1,25 puntos) Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.

b.2 (1,25 puntos) Los valores de α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Solución:

a) a.1 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1.$

- ☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

☛ Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2+F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible (no tiene solución)

a.2 Para $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=-2\\ y=1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda\\ y=1\\ z=\lambda \end{array}\right.\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Para $a\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}$:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} -2 & -1 & a\\ 3 & 2 & -a\\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right|}{|A|}=\frac{-a-1}{1-a^2}=-\frac{1}{1-a}$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & a\\ -1 & 3 & -a\\ a & 2 & 1 \end{array}\right|}{|A|}=\frac{1-a^2}{1-a^2}=1$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 3\\ a & 1 & 2 \end{array}\right|}{|A|}=\frac{a+1}{1-a^2}=\frac{1}{1-a}$$

b) b.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 2/5\\ 2/5 & 1/5 & -1/5\\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

$$B=A^3-3A^2+5A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3-2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2+5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 12 & 6\\ -3 & -3 & 6\\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0\\ -5 & 5 & 5\\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=5U$$

b.2 Sabemos $A^3-3A^2+5A=A(A^2-3A+5U)=5U\Longrightarrow$

$$A^2-3A+5U=5A^{-1}\Longrightarrow\frac{1}{5}(A^2-3A+5U)=A^{-1}\Longrightarrow\frac{1}{5}A^2-\frac{3}{5}A+U=A^{-1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha A^2+\beta A+U=A^{-1}\\ \frac{1}{5}A^2-\frac{3}{5}A+U=A^{-1} \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} \alpha=\frac{1}{5}\\ \beta=-\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Problema 8.1.3 GEOMETRÍA (2,5 puntos)
Responda al apartado a o b

a) Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las rectas $r:\left\{\begin{array}{l} y-z=0\\ 2x+2=0 \end{array}\right.$ y $s:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=z+2$, obtener:

a.1 (1,25 puntos) La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.

a.2 (1,25 puntos) La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π.

b) Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta r y el plano π, de ecuaciones $r:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{4}$ y $\pi: ax+y-z=b$, con a y b parámetros reales, obtener:

b.1 (1 punto) Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a.

b.2 (1,5 puntos) Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π.

Solución:

a) $r:\begin{cases} y-z=0\\ 2x+2=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=-1\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P_r(-1,0,0)\end{cases}$ y

$s:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{3}=z+2 \Longrightarrow s:\begin{cases} x=2-\mu\\ y=3\mu\\ z=-2+\mu\end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(-1,3,1)\\ P_s(2,0,-2)\end{cases}$

a.1 $\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-2,-1,1)$

$\pi: -2x-y+z+k=0 \xrightarrow{O\in\pi} K=0 \Longrightarrow \pi: 2x+y-z=0$

a.2 $d(P_r,\pi)=\dfrac{|-2+0+0|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\ u$

$d(P_s,\pi)=\dfrac{|4+0+2|}{\sqrt{4+1+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\ u$

b) $r:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x=5+\lambda\\ y=1+3\lambda\\ z=4\lambda\end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,3,4)\\ P_r(5,1,0)\end{cases}$ y $\overrightarrow{u_\pi}=(a,1,-1)$

b.1 Sustituimos r en π:

$a(5+\lambda)+(1+3\lambda)-4\lambda=b \Longrightarrow \lambda=\dfrac{5a-b+1}{1-a}$

- Si $a=1$ y $b\neq 6 \Longrightarrow r\parallel\pi$
- Si $a=1$ y $b=6 \Longrightarrow r\subset\pi$
- Si $a\neq 1 \Longrightarrow r$ y π se cortan en un punto.

El punto de corte es $P\left(5+\dfrac{5a-b+1}{1-a}, 1+3\dfrac{5a-b+1}{1-a}, 4\dfrac{5a-b+1}{1-a}\right)=$

$P\left(\dfrac{b-6}{a-1}, \dfrac{14a-3b+4}{1-a}, \dfrac{4(5a-b+1)}{1-a}\right)$

b.2 Como se vió en el apartado anterior si $a=1$ la recta o es paralela al plano o está contenida en él $\xrightarrow{a=1} \pi: x+y-z=b$

Para que r esté contenida en el plano $P_r\in\pi \Longrightarrow \pi: 5+1+0=b \Longrightarrow b=6$.

En conclusión $r\subset\pi \Longrightarrow a=1$ y $b=6$.

Si $a=1$ y $b\neq 6 \Longrightarrow r\parallel\pi$.

Problema 8.1.4 ANÁLISIS (2,5 puntos)
Responda al apartado a o b

a) Responda a todos los subapartados siguientes:
Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

a.1 (1,25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $(-1, 0)$. Dibujad un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$.

a.2 (1,25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$.

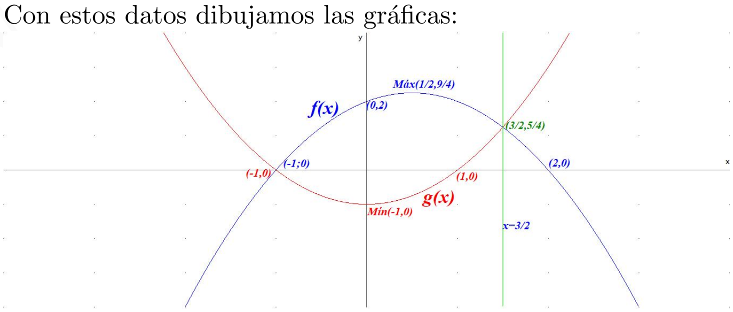
b) Responda a todos los subapartados siguientes:
Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.
La base del rectángulo mide x y su altura mide y, por lo que el diámetro del semicírculo mide x.
Obtener:

b.1 (1 punto) La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x.

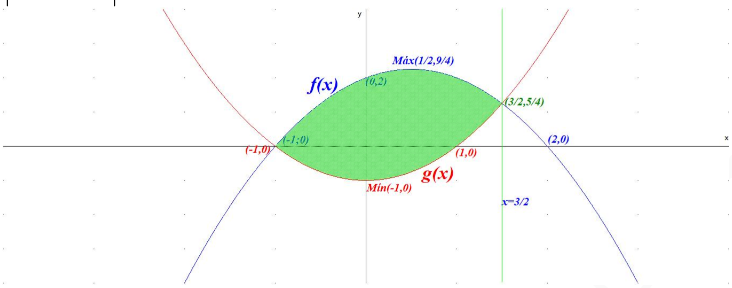
b.2 (1,5 puntos) El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Solución:

a) a.1 $f(x) = g(x) \Longrightarrow -x^2 + x + 2 = x^2 - b \Longrightarrow -2x^2 + x + 2 + b = 0 \xrightarrow{x=-1} -2 - 1 + 2 + b = 0 \Longrightarrow b = 1$.
$-2x^2 + x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = \dfrac{3}{2}$
$f(x) = -x^2 + x + 2$ es una parábola vertical que corta al eje de abscisas en los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 0)$, y con el eje de ordenadas en $(0, 2)$ Como $f'(x) = -2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$, $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2 < 0 \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ es un máximo.
$g(x) = x^2 - 1$ es una parábola vertical que corta al eje de abscisas en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y con el eje de ordenadas en $(0, -1)$ Como $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$, $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow (0, -1)$ es un mínimo.
Con estos datos dibujamos las gráficas:



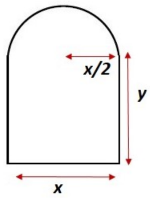
a.2 $S = \left|\int_{-1}^{3/2}(f(x)-g(x))\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{3/2}(-2x^2+x+3)\,dx\right| = \left|-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3/2}\right| = \left|\frac{27}{8}+\frac{11}{6}\right| = \frac{125}{24} \simeq 5,2083\ u^2$



b) b.1 Tenemos:

El perímetro: $P(x,y) = \frac{2\pi\frac{x}{2}}{2} + x + 2y = 5 \Longrightarrow y = \frac{10-(\pi+2)x}{4}$

El área: $S(x,y) = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + xy \Longrightarrow S(x) = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + x\frac{10-(\pi+2)x}{4} = \frac{-(\pi+4)x^2+20x}{8}$



b.2 $S'(x) = \frac{-(\pi+4)x+10}{4} = 0 \Longrightarrow x = \frac{10}{\pi+4}$

$S''(x) = \frac{-(\pi+4)}{4} \Longrightarrow S''\left(\frac{10}{\pi+4}\right) = \frac{-(\pi+4)}{4} < 0 \Longrightarrow x = \frac{10}{\pi+4}$ u es un máximo.

El área será: $S\left(\frac{10}{\pi+4}\right) = \frac{25}{2(\pi+4)} \simeq 1,75\ u^2$

Capítulo 9

Extremadura

9.1. Modelo

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El estudiante deberán resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen.
Este examen consta de 4 PROBLEMAS. Los PROBLEMAS 1, 2, 3 con dos ejercicios A y B optativos cada uno. El PROBLEMA 4 con un único ejercicio obligatorio. En los PROBLEMAS 1, 2 y 3 se deberá contestar solamente a UNO de los dos ejercicios (A ó B) propuestos. Si resuelve más de uno, se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.
Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Entre corchetes está la puntuación máxima por apartado.
Criterios generales: Las respuestas a las preguntas de los ejercicios deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de cada pregunta o ejercicio.
En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o ejercicio.
Ortografía y redacción: Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica, la presentación. Se podrá deducir hasta 1 punto. Además, en la puntuación máxima de cada pregunta o ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados, sin sobrepasar el total de 1 punto antes referido.
Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable.
Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.
Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

Problema 9.1.1 (2,5 puntos) (Bloques A+D, SENTIDOS NUMÉRICO Y ALGEBRAICO)

a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $m \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{l} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array}\right.$

a.1 (1,5 puntos) Discute el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m. Indica el número de soluciones en cada caso.

a.2 (1 puntos) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$.

b) Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$
Halla matriz X que verifica: $AX + B^t = 2A + X$.
(Planteamiento hasta 1 punto, cálculo de X hasta 1,5 puntos)

Solución:

a) a.1 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & m \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = x^2 - 7m + 10 = 0 \Longrightarrow m = 2$ y $m = 5$.

- Si $m \in \mathbb{R} - \{2, 5\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única)
- Si $m = 2$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema Incompatible (no tiene solución)
- Si $m = 5$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
Sistema Compatible Indeterminado (tiene infinitas soluciones)

a.2 Si $m = 3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ 3F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right) =$$
$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 + 4F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 18 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -6z = 18 \Longrightarrow z = -3 \\ 5y - 3 = 7 \Longrightarrow y = 2 \\ 3x + 4 - 3 = 1 \Longrightarrow x = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x = 0, \quad y = 2 \text{ y } z = -3$$

b) $AX + B^t = 2A + X \Longrightarrow AX - X = 2A - B^t \Longrightarrow (A - I)X = 2A - B^t \Longrightarrow$
$X = (A - I)^{-1}(2A - B^t) =$
$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \left[2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & -4 \\ -12 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & -4 \\ -12 & 8 & 7 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 15 & -9 & -7 \\ 8 & -3 & -4 \\ 10 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 9.1.2 (2,5 puntos)(Bloque B, SENTIDO DE LA MEDIDA)

a) (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = (x+2)e^{-x}$

a.1 (1 punto) Encuentra los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

a.2 (0,75 puntos) Determina la concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función f.

a.3 (0,75 puntos) Estudia las asíntotas de f.

b) (2,5 puntos) Dadas las funciones $f(x) = 2x+6$ y $g(x) = x^2 - 3x$.

b.1 (1,25 puntos) Calcula $\displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$.

b.2 (1,25 puntos) Halla el área de dicho recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

a) $f(x) = (x+2)e^{-x}$

a.1 $f'(x) = -e^{-x}(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-1, \infty)$ y creciente en el $(-\infty, -1)$ y tiene un máximo relativo en $(-1, e)$.

a.2 $f''(x) = xe^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava $\smile$ en el $(0, \infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$.

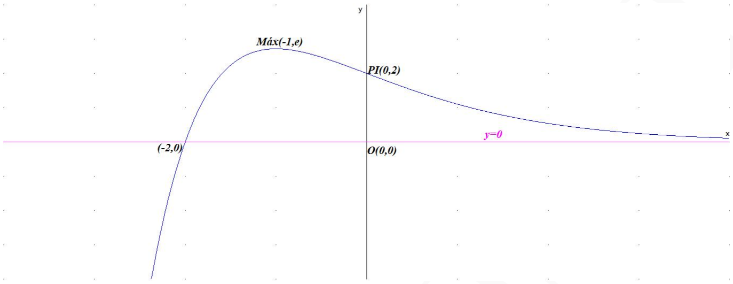
a.3 Asíntotas:

- Verticales: No hay ya que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Horizontales:
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}((x+2)e^{-x}) = -\infty \Longrightarrow$ No hay.

- $\lim_{x\to\infty}((x+2)e^{-x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$, no hay.

- $m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)e^{-x}}{x} \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{(-t+2)e^t}{-t} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] \stackrel{L'H}{=}$
  $\lim_{t\to\infty}\frac{(1-t)e^t}{-1} = \infty \Longrightarrow$ No hay.
- Cuando $x\to\infty$ hay una asíntota horizontal y, por tanto, no hay oblicua.



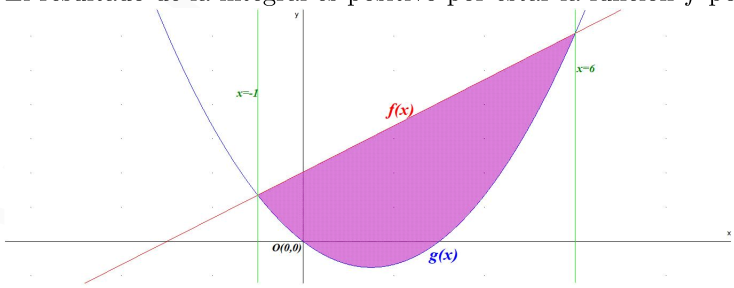
b) b.1 $\int \frac{2x+6}{x^2-3x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \frac{2x+6}{x^2-3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)} \\ 2x+6 = A(x-3)+Bx \\ x=0 \Longrightarrow 6 = -3A \Longrightarrow A = -2 \\ x=3 \Longrightarrow 12 = 3B \Longrightarrow B = 4 \\ \frac{2x+6}{x^2-3x} = \frac{-2}{x} + \frac{4}{x-3} \end{array}\right] =$

$\int\left(\frac{-2}{x} + \frac{4}{x-3}\right)dx = -2\ln|x| + 4\ln|x-3| + C$

b.2 $f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x+6 = x^2-3x \Longrightarrow x^2-5x-6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 6$.

$S = \left|\int_{-1}^{6}(-x^2+5x+6)\,dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{6}\Bigg| = \left|\frac{343}{6}\right| = \frac{343}{6} \simeq 57,1667\ u^2$

El resultado de la integral es positivo por estar la función f por encima de la g.



Problema 9.1.3 (2,5 puntos)(Bloque C, SENTIDO ESPACIAL)

a) Sea el punto $P(1,0,-2)$ y la recta $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+3}{-3}$
Se pide:

a.1 (1 punto) La ecuación continua de la recta s que pasa por P y que corta a r perpendicularmente.

a.2 (0,75 puntos) La ecuación del plano que contiene a las dos rectas r y s.

a.3 (0,75 puntos) La distancia del punto P a la recta r.

b) Sean $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$ y $R(0,5,1)$ los vértices de un triángulo:

b.1 (1,5 puntos) Calcula el área y el perímetro de dicho triángulo.

b.2 (1 puntos) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R.

Solución:

a) $r: \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+3}{-3} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -3 - 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,2,-3) \\ P_r(5,3,-3) \end{cases}$

a.1 Seguimos el siguiente método:

☛ Calculamos un plano $\pi \perp r$ tal que $P \in \pi$:
$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (2,2,-3) \Longrightarrow \pi: 2x + 2y - 3z + K = 0 \xRightarrow{P\in\pi} 2 + 0 + 6 + K = 0 \Longrightarrow K = -8 \Longrightarrow \pi: 2x + 2y - 3z - 8 = 0$

☛ Calculamos el punto Q de corte de π con r:
$2(5+2\lambda) + 2(3+2\lambda) - 3(-3-3\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow Q(3,1,0)$

☛ $s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{QP} = (1,0,-2) - (3,1,0) = -(2,1,2) \\ P_s = P(1,0,-2) \end{cases} \Longrightarrow s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{2}$

a.2 $\pi': \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,2,-3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,2) \\ P(1,0,-2) \end{cases} \Longrightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7x - 10y - 2z - 11 = 0$

a.3 $d(P,r) = |\overrightarrow{QP}| = |-(2,1,2)| = \sqrt{9} = 3\ u$

b) Sean $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$ y $R(0,5,1)$

b.1 Tenemos:
$\overrightarrow{PQ} = (-2,1,0) - (-1,2,3) = (-1,-1,-3) \Longrightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{11}$
$\overrightarrow{PR} = (0,5,1) - (-1,2,3) = (1,3,-2) \Longrightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{14}$
$\overrightarrow{QR} = (0,5,1) - (-2,1,0) = (2,4,1) \Longrightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{21}$
El perímetro del triángulo es $\sqrt{11} + \sqrt{14} + \sqrt{21} \simeq 11,64085787\ u$

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(11,-5,-2)| = \frac{5\sqrt{6}}{2}\ u$$

b.2 $r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (11,-5,-2) \\ P_r = O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 9.1.4 (2,5 puntos) (Bloque E, SENTIDO ESTOCÁSTICO)
Una persona tiene que ser operada de la rodilla y para ello ha sido incluida en la lista de espera. Según los últimos datos publicados por el Servicio Extremeño de Salud (SES), el tiempo medio de espera en Extremadura para ser operado por el servicio de Traumatología es de 242 días. Sabiendo que dicho tiempo medio se distribuye normalmente con una desviación típica de 10 días:

a) (0,75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que esa persona sea intervenida antes de 200 días?

b) (0,75 puntos) Por otra parte, se está estudiando la posibilidad de que un paciente sea intervenido en la sanidad privada siempre que no haya podido ser atendido antes de los 260 días. De ser así, ¿qué probabilidad hay de que sea atendida en la sanidad privada?

c) (1 punto) Si finalmente el 70 % de los pacientes en lista de espera fueron atendidos antes que esta persona, ¿cuántos días estuvo en lista de espera la persona en cuestión?

Solución:

$$N(242;10)$$

a) $P(X \leq 200) = P\left(Z \leq \dfrac{200-242}{10}\right) = P(Z \leq -4,2) = 1 - P(Z \leq 4,2) = 1 - 1 = 0$

b) $P(X \geq 260) = P\left(Z \geq \dfrac{260-242}{10}\right) = P(Z \geq 1,8) = 1 - P(Z \leq 1,8) = 1 - 0,9641 = 0,0359$

c) $P(X \leq k) = P\left(Z \leq \dfrac{k-242}{10}\right) = 0,7 \Longrightarrow \dfrac{k-242}{10} = 0,525 \Longrightarrow k = 247,25$
Aproximadamente 247 días.

Capítulo 10

Galicia

10.1. Modelo

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Problema 10.1.1 Probabilidad y estadística (2,5 puntos)
CONTEXTO
Algunas pruebas médicas resultan ser «positivas» o «negativas». Si la prueba fuese infalible, «positiva» indicaría que la persona examinada tiene la enfermedad en cuestión; «negativas» indicaría que no la tiene. Una guionista está escribiendo, para una conocida plataforma de streaming, una historia que tiene lugar en un país imaginario. Explica en su guion que, para detectar una rara enfermedad que afecta a 1 de cada 10000 personas, una empresa farmacéutica logra desarrollar una prueba que resulta ser muy fiable, pues solamente 1 de cada 100 personas libres de la enfermedad obtiene un resultado positivo, y solamente 2 de cada 100 personas que padecen la enfermedad obtienen resultados negativos. Dice también que los detalles que revelan el diseño de la prueba están protegidos por varios sistemas de seguridad, y que, el 9 de agosto de 2024, la clave que permite abrir el último de esos sistemas es el número 219, el cual se ha calculado, específicamente para ese día, de la siguiente manera:

Clave = nº de ríos cuya longitud en metros comienza con el dígito 9, de entre los 2000 más largos del país= 219.

Poco antes de entregar su guion, le surgen dudas acerca de la verosimilitud de sus cifras, conque decide compartirlas con una amiga matemática. Esta le dice que le responderá una vez que calcule las siguientes probabilidades:

- P_1 = la probabilidad de que una persona con una prueba positiva tenga la enfermedad.
- P_2 = la probabilidad de que una persona con una prueba negativa tenga la enfermedad.
- P_3 = la probabilidad de que 219 ríos o más tengan una longitud en metros cuyo primer dígito sea el 9.
  Con relación a este punto, la amiga matemática observa que, en muchos conjuntos de datos reales, los primeros dígitos no se distribuyen de manera uniforme, sino que siguen la llamada ley de Benford, la cual afirma que la probabilidad de que un número comience con el dígito d es $p = \log_{10}(1 + 1/d)$. Por ello, supondrá que la probabilidad de que un río tenga una longitud en m cuyo primer dígito sea el 9 es $p = 0,0458$.

Responda estos tres apartados:

a) (0,5+0,5=1 punto) Calcule P_1 y P_2. Entienda que los únicos resultados posibles de la prueba son «positivo»o «negativo».

b) (1 punto) Calcule P_3.

c) (0,5 puntos) En función de los valores de P_1, P_2 y P_3, dé al menos un motivo por el cual la guionista debería modificar alguna de sus cifras. No es necesario que diga cuáles deberían ser esas modificaciones ni cómo deberían ser efectuadas.

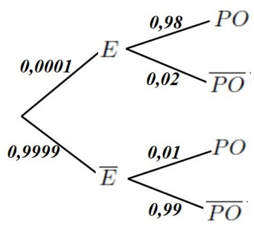
Solución:

Sean los sucesos E tiene la enfermedad, $\overline{E}$ no tiene la enfermedad, PO el resultado de la prueba es positivo y $\overline{PO}$ el resultado de la prueba es negativo.

a) $P(PO) = P(PO|E)P(E) + P(PO|\overline{E})P(\overline{E}) = 0,98 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,9999 = 0,010097$

- ☛ $P_1 = P(E|PO) = \dfrac{P(PO|E)P(E)}{P(PO)} = \dfrac{0,98 \cdot 0,0001}{0,010097} = 0,009705853223$

- ☛ $P_2 = P(E|\overline{PO}) = \dfrac{P(\overline{PO}|E)P(E)}{P(\overline{PO})} = \dfrac{0,02 \cdot 0,0001}{1 - 0,010097} = 0,000002$



b) Tenemos $n = 2000$ y $p = 0,0458 \Longrightarrow B(2000; 0,0458)$

Como $n \geq 30$, $np = 2000 \cdot 0,0458 = 91,6 > 5$ y $nq = 2000 \cdot (1 - 0,0458) = 1908,4 > 5 \Longrightarrow$

$B(2000; 0,0458) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(91,6; 9,349)$

$P(X \geq 219) = P\left(Z \geq \dfrac{218,5 - 91,6}{9,349}\right) = P(Z \geq 13,57) = 1 - P(Z \leq 13,57) = 1 - 1 = 0$

Luego $P_3 = 0$

c) La probabilidad P_1 (falsos positivos) es muy baja ($\approx 1\,\%$) aunque puede ser mejorable y la clave no parece ser la adecuada por haber 219 ríos que ya cumplen la condición.

Números y Álgebra:

Problema 10.1.2 NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos)
Responda uno de estos dos apartados: a) o b)

a) Responda los dos subapartados siguientes, considerando este sistema lineal:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m + 1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$$

1. Discuta el sistema en función del valor del parámetro real m. (2 puntos)
2. Si es posible, resuélvalo en el caso $m = 0$. (0,5 puntos)

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 punto)

2. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1}+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad. (1,5 puntos)

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array}\right)$, $|A| = m^2-m-2 = 0 \Longrightarrow m=-1$ y $m=2$.

1. ☛ Si $m \in \mathbb{R}-\{-1,2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

   ☛ Si $m=-1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

   ☛ Si $m=2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

2. Si $m=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

b) 1. Sea $(AB)^T = C \Longrightarrow AB = C^T \Longrightarrow A = C^TB^{-1} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

2. $|A-3I| = \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = -xy = 0 \xLongrightarrow{y\neq 0} x=0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$
y como A es invertible tiene que ser $z \neq 0$ ya que $A^{-1} = \dfrac{1}{3z}\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix}$
sustituyendo en $(3z)A^{-1}+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ tenemos $\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} z+1 & 0 \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z+1=2 \Longrightarrow z=1 \\ -y=-1 \Longrightarrow y=1 \\ x=0 \end{array}\right.$

Análisis

Problema 10.1.3 ANÁLISIS. (2,5 puntos)

a) **Responda los dos subapartados siguientes:**

1. Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial. (1,25 puntos)
2. Explique si $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del calculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema. (0,75+0,5=1,25 puntos)

b) Responda los dos subapartados siguientes:

1. Calcule mediante cambio de variable las siguientes integrales:
   I. $\displaystyle\int (\sin x)^5 \cos x dx$. (0,5 puntos)
   II. $\displaystyle\int (\ln x)/x dx$. (0,5 puntos)
2. Calcule $\displaystyle\int (\ln x)/x dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\displaystyle\int_e^B (\ln x)/x dx = 3/2$. (1+0,5=1,5 puntos)

Solución:

1. **Teorema de Rolle**
   Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.
   Teorema del Valor Medio de Lagrange
   Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b) entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2. La función f es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ luego cumple las condiciones del teorema del valor medio.
   Luego $\exists c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{0-1}{1} = -1$
   $$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Longrightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = -1 \Longrightarrow -c = -\sqrt{1-c^2} \Longrightarrow$$
   $$c^2 = 1-c^2 \Longrightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{c\in(0,1)} c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. I. $$\int (\sin x)^5 \cos x dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{array}\right] = \int t^5 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^5\, dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{(\sin x)^6}{6} + C$$

   II. $$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ dx = x dt \end{array}\right] = \int \frac{t}{x} x dt = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

2. $F(x)=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\ln x\Longrightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=\frac{1}{x}dx\Longrightarrow v=\ln x\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=(\ln x)^2-\int\frac{\ln x}{x}\,dx=(\ln x)^2-F(x)\Longrightarrow$

$$2F(x)=(\ln x)^2\Longrightarrow F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$\int_e^B\frac{\ln x}{x}\,dx=F(B)-F(e)=\frac{(\ln B)^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{(\ln B)^2-1}{2}=\frac{3}{2}\Longrightarrow(\ln B)^2-1=3\Longrightarrow$$

$$\ln B=\pm 2\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} B=e^{-2}\\ B=e^2\end{array}\right.$$

Problema 10.1.4 GEOMETRÍA. (2,5 puntos)

a) **Responda los dos subapartados siguientes:**

1. Se consideran $\pi: ax+y+z=1$, donde a es un parámetro real, y $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{3}$
   I. Estudie la posición relativa del plano π y la recta r en función de a. (0,5 puntos)
   II. Obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. (0,5 puntos)
   III. Razone si r puede estar contenida en π o no. (0,5 puntos)
2. Si π es el plano de ecuación $-3x+y+z=1$, diga qué valor debe tomar el parámetro real b para que la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-b}{3}=\dfrac{z+1}{3}$ esté contenida en π. (1 punto)

b) Responda los dos subapartados siguientes, donde π es el plano de ecuación $2x-y+z=1$:

1. Calcule la distancia de π al punto de corte de las rectas
   $r_1:\left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda\\ y=0\\ z=-1-\lambda\end{array}\right.$ y $r_2:\left\{\begin{array}{l} x=\mu\\ y=-1+\mu\\ z=0\end{array}\right.$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. (1,25 puntos)
2. Obtenga el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π. (1,25 puntos)

Solución:

a) 1. $\pi: ax+y+z=1\Longrightarrow\overrightarrow{u_\pi}=(a,1,1)$ y $r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,3)\\ P_r(1,0,-1)\end{array}\right.$

I. $r:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=-1+3\lambda\end{array}\right.\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$

sustituyendo en π: $a(1+2\lambda)+3\lambda+(-1+3\lambda)=1\Longrightarrow(2a+6)\lambda=2-a\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a=-3\Longrightarrow !0=5!\Longrightarrow r\parallel\pi\\ a\neq-3\Longrightarrow\lambda=\dfrac{2-a}{2a+6}\Longrightarrow r \text{ y } \pi \text{ se cortan}\end{array}\right.$$

II. $r\perp\pi\Longrightarrow\overrightarrow{u_\pi}=k\overrightarrow{u_r}$ con $k\in\mathbb{R}\Longrightarrow(a,1,1)=k(2,3,3)\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} a=2k\\ 1=3k\\ 1=3k\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{2}{3}\\ k=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Si $a=\dfrac{2}{3}\Longrightarrow r\perp\pi$

III. Si $a = -3 \Longrightarrow r \parallel \pi$ y si $a \neq -3 \Longrightarrow r$ y π se cortan, luego $r \not\subset \pi$. Se puede comprobar que para $a = -3$ el punto $P_r \notin \pi$:

$$\pi : -3x+y+z = 1 \xrightarrow{P_r(1,0,-1)\in\pi} -3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot(-1) = -4 \neq 1 \Longrightarrow P_r \notin \pi \Longrightarrow r \not\subset \pi$$

2. Ahora $\pi : -3x + y + z = 1$ y $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = b + 3\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$ sustituyendo r en π:

$-3(1 + 2\lambda) + (b + 3\lambda) + (-1 + 3\lambda) = 1 \Longrightarrow b - 4 = 1 \Longrightarrow b = 5$

b) Tenemos $\pi : 2x - y + z = 1$:

1. Calculamos el punto de corte de las rectas

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda = \mu \\ y = 0 = -1 + \mu \\ z = -1 - \lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Longrightarrow P(1, 0, 0)$$

$$d(P, \pi) = \frac{|2 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

2. Seguimos el siguiente método:

- ☛ Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $P \in t$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 1) \\ P_t = P(1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

- ☛ Calculamos el punto P' de corte de t con π:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + \lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Longrightarrow P'\left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

- ☛ P' punto medio entre P y el que buscamos P'', es decir:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2\left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right) - (1, 0, 0) \Longrightarrow P'\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Capítulo 11

Islas Baleares

11.1. Modelo

ESTRUCTURA EXAMEN
La prueba consta de 4 problemas: el primero sin opcionalidad, y los otros tres con dos posibles cuestiones a contestar una. En caso de contestar dos cuestiones de un mismo problema, solo se evaluará el primero.
Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

Problema 11.1.1 (2,5 puntos) **Contesta la única opción de este problema.**
La NASA se dispone a lanzar una nave espacial desde su base en Cabo Cañaveral, Florida.

a) (0,5 puntos) Supongamos que la nave viaje siempre en la línea recta. Si se lanza en dirección $\overrightarrow{d} = (2,3,6)$ y sabemos que la Luna se encuentra a 384.400km de la Tierra. ¿Cuáles son las coordenadas de la luna respecto de la base localizada en Cabo Cañaveral?

b) (0,5 puntos) Calcula el plano perpendicular a la trayectoria de la nave y que contiene la Luna.

c) (0,75 puntos) En lugar de lanzar la nave directamente hacia la Luna, normalmente se hace un primer lanzamiento para ajustar la trayectoria y a continuación se reajusta la trayectoria hacia el destino deseado. Si, partiendo desde la base, el primer lanzamiento se hace en dirección $\overrightarrow{d}_{inicial} = (1,1,2)$ inicial, ¿cuál es la dirección que deben poner en el reajuste para llegar a la Luna con esta segunda trayectoria?

d) (0,75 puntos) Calcula la intersección de la recta que pasa por la Luna y el vector director $(2,3,6)$, con el plano $z = 0$.

Solución:

a) Si consideramos que la tierra se encuentra en el origen de coordenadas $O(0,0,0)$ (Cabo Cañaveral) la luna se encontrará en el punto $L = O + \lambda\overrightarrow{d} = (0,0,0) + \lambda(2,3,6) = \lambda(2,3,6)$ Sabemos que $|\overrightarrow{OL}| = |\lambda(2,3,6) - (0,0,0)| = |\lambda||(2,3,6)| = |\lambda|\sqrt{49} = 7|\lambda| = 384400 \Longrightarrow |\lambda| = \dfrac{384400}{7} \Longrightarrow \lambda = \dfrac{384400}{7}$ la solución negativa es irrelevante. Tenemos:

$$L\left(\frac{384400\cdot 2}{7}, \frac{384400\cdot 3}{7}, \frac{384400\cdot 6}{7}\right) = L\left(\frac{768800}{7}, \frac{1153200}{7}, \frac{2306400}{7}\right)$$

b) El plano $\pi : 2x+3y+6z+k=0 \overset{L\in\pi}{\Longrightarrow} \dfrac{768800\cdot 2}{7}+\dfrac{1153200\cdot 3}{7}+\dfrac{2306400\cdot 6}{7}+k=0 \Longrightarrow$ $k=-2690800 \Longrightarrow \pi : 2x+3y+6z-2690800=0$

c) El ajuste será el vector $\overrightarrow{u}$ y tiene que cumplir:
$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{d}_{inicial}+\overrightarrow{u} \Longrightarrow \overrightarrow{u}=\overrightarrow{d}-\overrightarrow{d}_{inicial}=(2,3,6)-(1,1,2)=(1,2,4)$

d) $r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,3,6)\\ P_r=L\left(\dfrac{768800}{7},\dfrac{1153200}{7},\dfrac{2306400}{7}\right)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{768800}{7}+2\lambda\\ y=\dfrac{1153200}{7}+3\lambda\\ z=\dfrac{2306400}{7}+6\lambda\end{array}\right.$

Sustituimos en $z=0 \Longrightarrow \dfrac{2306400}{7}+6\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\dfrac{384400}{7} \Longrightarrow$
El punto de corte H buscado es

$$H\left(\frac{768800}{7}+2\lambda,\frac{1153200}{7}+3\lambda,\frac{2306400}{7}+6\lambda\right)=$$

$$H\left(\frac{768800}{7}-\frac{384400\cdot 2}{7},\frac{1153200}{7}-\frac{384400\cdot 3}{7},\frac{2306400}{7}-\frac{384400\cdot 6}{7}\right)=O\,(0,0,0)$$

Problema 11.1.2 (2,5 puntos) **Contesta una sola opción de este problema a o b**.

a) Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- ☛ Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- ☛ Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- ☛ Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- ☛ Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

a.1 (0,75 puntos) Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debe de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

a.2 (0,5 puntos) ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

a.3 (1,25 puntos) Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

b) Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2×2.

b.1 (1 punto) Calcula todas las matrices X tales que $AX-X=B$

b.2 (0,75 puntos) Encuentra una matriz Y diferente de O tal que $(A-B)Y=O$.

b.3 (0,75 puntos) Indica todas las matrices que cumplen la igualdad $AZ=O$

Solución:

a) Sean x el precio de una botella de vino tinto, y de blanco y z de rosado.

☛ $3x+2y=67$

☛ $2x+4y+z=85$

☛ $x+z=21$

☛ $4y+5z=85$

a.1 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$

a.2 Sobra una ecuación que tiene que ser combinación lineal de las otras para que el sistema tenga solución.

a.3 $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 67 \\ 2 & 4 & 1 & 85 \\ 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 3 & 2 & 0 & 67 \\ 2 & 4 & 1 & 85 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 43 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 0 & 0 & -11 & -77 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \end{array}\right) =$
$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 11F_4 - 6F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 4 & 5 & 85 \\ 0 & 0 & -11 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} -11z = -77 \Longrightarrow z = 7 \\ 4y + 35 = 85 \Longrightarrow y = 12,5 \\ x + 7 = 21 \Longrightarrow x = 14 \end{cases}$

La botella de vino tinto tiene un precio de 14 €, la de blanco 12,5 € y la de rosado a 7 €.

b) Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y sea O la matriz nula de orden 2×2.

b.1 $AX - X = B \Longrightarrow (A - I)X = B \Longrightarrow X = (A - I)^{-1}B =$
$\left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b.2 Sea $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y tenemos $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(A - B)Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\begin{cases} a - 2c = 0 \Longrightarrow a = 2c \\ b - 2d = 0 \Longrightarrow b = 2d \\ -a + 2c = 0 \Longrightarrow a = 2c \\ -b + 2d = 0 \Longrightarrow b = 2d \end{cases}$

Como $Y = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$ una solución puede ser $a = b = 2$ y $c = d = 1 \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b.3 Tenemos $|A| = 9 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ luego $AZ = O \Longrightarrow Z = A^{-1}O = O$

Problema 11.1.3 (2,5 puntos) **Contesta una sola opción de este problema a o b.**

a) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

b) La cantidad de toneladas de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^{-x} + 0,15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

b.1 (1 punto) ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.

b.2 (1 punto) ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?

b.3 (0,5 puntos) ¿Hay algún momento en el que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

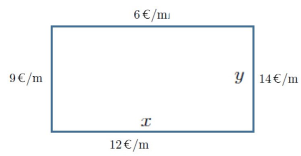
Solución:

a) Tenemos:

$(6+12)x + (9+14)y = 18x + 23y = 1000 \Longrightarrow y = \dfrac{1000-18x}{23}$

$S(x,y) = xy \Longrightarrow S(x) = x\dfrac{1000-18x}{23} = \dfrac{1000x - 18x^2}{23}$

$S'(x) = \dfrac{4(250x-9x)}{23} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{250}{9} \simeq 27,778$



	$(0, 250/9)$	$(250/9, \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \dfrac{250}{9}\right)$ y decreciente en el $\left(\dfrac{250}{9}, \infty\right)$ con un máximo relativo en $x = \dfrac{250}{9} \simeq 27,778$ m $\Longrightarrow y = \dfrac{1000 - 18 \cdot 250/9}{23} \simeq 21,739$ m.

b) $f(x) = e^{-x} + 0,15x + 1$ siendo $x \geq 0$

b.1 En el instante inicial $f(0) = 2$ Tm
$\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x} + 0,15x + 1) = +\infty \Longrightarrow$ con el paso del tiempo se infectará toda el agua.

b.2 $f'(x) = -e^{-x} + 0,15 = 0 \Longrightarrow x = -\ln 0,15 \simeq 1,8971$ y $f''(x) = e^{-x} \Longrightarrow f''(1,8971) = e^{-1,8971} > 0 \Longrightarrow x = 1,8971$ es un mínimo relativo (en este caso absoluto)
A los $1,8971$ días la cantidad de agua infectada será mínima y será de $f(1,8971) = 1,4346$ Tm.

b.3 La función decrece hasta $x = -\ln 0,15$ y crece indefinidamente a partir de ese momento, luego la función es siempre positiva y no corta el eje de abscisas en ningún momento. El agua siempre está infectada.

Problema 11.1.4 (2,5 puntos) **Contesta una sola opción de este problema a o b.**

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisfacen que $P(A \cup B) = 0,7$, $P(A \cap B) = 0,1$ y $P(A \cap B^c) = 0,35$. Siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

a.1 (0,75 puntos) $P(A)$.

a.2 (0,75 puntos) $P(B)$

a.3 (0,5 puntos) $P(A^c \cup B^c)$

a.4 (0,5 puntos) ¿Son A y B sucesos independientes?

b) El 38 % de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21 % prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

b.1 (0,75 puntos) Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

b.2 (0,75 puntos) Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

b.3 (1 punto) Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Solución:

a) Por comodidad $A^c = \overline{A}$

a.1 $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,35 = P(A) - 0,1 \Longrightarrow P(A) = 0,45$

a.2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,7 = 0,45 + P(B) - 0,1 \Longrightarrow P(B) = 0,35$

a.3 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$

a.4 $P(A) \cdot P(B) = 0,45 \cdot 0,35 = 0,1575 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) Sean $N1$ aficionado a la natación elegido en primer lugar, $C1$ al ciclismo elegido en primer lugar, $R1$ restantes deportes elegido en primer lugar, $N2$ aficionado a la natación elegido en segundo lugar, $C2$ al ciclismo elegido en segundo lugar y $R2$ restantes deportes elegido en segundo lugar.
Tenemos dos casos posible, uno de ellos es suponer que tenemos una muestra pequeña de habitantes, por ejemplo 100, y otra una muestra grande, por ejemplo 2000. Todo depende de la cantidad de habitantes del pueblo. El enunciado no dice nada sobre ello, por tanto, supongo que se trata de una población lo suficientemente grande de forma que la probabilidad de elección de la primera persona y la segunda sea la misma.
$P(N1) = P(N2) = 0,38$, $P(C1) = P(C2) = 0,21$ y $P(R1) = P(R2) = 0,41$

b.1 $P(N1 \cap N2) = 0,38 \cdot 0,38 = 0,1444$.

b.2 $P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) = 0,38 \cdot 0,21 + 0,21 \cdot 0,38 = 0,1596$

b.3 $P(\overline{C2}|C1) = \dfrac{P((N2 \cup R2) \cap C1)}{P(C1)} = \dfrac{P((N2 \cap C1) \cup (R2 \cap C1)}{P(C1)} = \dfrac{0,38 \cdot 0,21 + 0,41 \cdot 0,21}{0,21} = 0,79$

La otra manera de ver el problema es suponer que el pueblo tiene 100 habitantes. En este caso tenemos 38 personas que prefieren la natación, 21 el ciclismo y 49 el resto de deportes. Tenemos: $P(N1) = \dfrac{38}{100}$, $P(N2|N1) = \dfrac{37}{99}$, $P(C1) = \dfrac{21}{100}$, $P(C2|C1) = \dfrac{20}{99}$, $P(R1) = \dfrac{41}{100}$ y $P(R2|R1) = \dfrac{40}{99}$.

$a)\ P(N1 \cap N2) = \dfrac{38}{100} \cdot \dfrac{37}{99} = \dfrac{703}{4950} = 0,1420.$

$b)\ P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) = \dfrac{38}{100} \cdot \dfrac{21}{99} + \dfrac{21}{100} \cdot \dfrac{38}{99} = \dfrac{133}{825} = 0,1612$

$c)\ P(\overline{C2}|C1) = \dfrac{P((N2 \cup R2) \cap C1)}{P(C1)} = \dfrac{P((N2 \cap C1) \cup (R2 \cap C1))}{P(C1)} = \dfrac{\frac{38}{99} \cdot \frac{21}{100} + \frac{41}{99} \cdot \frac{21}{100}}{\frac{21}{100}} =$
$\dfrac{79}{99} = 0,798$

Capítulo 12

Islas Canarias

12.1. Modelo

Sin examen modelo.

Capítulo 13

La Rioja

13.1. Modelo

Sin examen modelo.

Capítulo 14

Madrid

14.1. Modelo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 14.1.1 (2,5 puntos) Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.

b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ.

c) (1 punto) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $(A^t A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$, según los valores de a.

Solución:

a) $AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|AB| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists (AB)^{-1}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

No existe ningún valor de λ que anule el determinante de AB luego no existe ningún valor de λ con el que no exista la inversa de AB.

b) $BA=\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2+1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1-\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}$

$|BA|=0$ y $\begin{vmatrix} \lambda^2+1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2+1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(BA)=2 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

c) Si $\lambda=1$ tenemos:

$A^tA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 \\ a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$

$\overline{A^tA}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2a-a^2 \end{array}\right)=$

$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-a^2 \end{array}\right)$

$2a-a^2=a(2-a)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=2$.

- ☛ $\forall a\in\mathbb{R}-\{0,2\} \Longrightarrow 2a-a^2\neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

- ☛ Si $a=0$ o $a=2 \Longrightarrow 2a-a^2=0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

Problema 14.1.2 (2,5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

Solución:

Sean x el número de litros de la garrafa grande, y el número de litros de la garrafa mediana y z el número de litros de la garrafa pequeña.

$$\begin{cases} 6z+2=y+x \\ 2x=2y+z+1 \\ 14z+6y=5y+5x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y-6z=2 \\ 2x-2y-z=1 \\ 5x-y-14z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=37 \text{ L garrafa grande} \\ y=31 \text{ L garrafa mediana} \\ z=11 \text{ L garrafa pequeña} \end{cases}$$

La garrafa grande es de 37 L, la garrafa mediana es de 31 L y la garrafa pequeña es de 11 L. El aljibe contiene $5x+5y=5(x+y)=5\cdot 68=340$ L.

Por Gauss:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -14 & 0 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-5F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & 11 & -3 \\ 0 & -6 & 16 & -10 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3-3F_2 \end{bmatrix}=$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -4 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases} -z=-11 \Longrightarrow z=11 \\ -4y+121=-3 \Longrightarrow y=31 \\ x+31-66=2 \Longrightarrow x=37 \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=37 \\ y=31 \\ z=11 \end{cases}$

Bloque 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 14.1.3 (2,5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{si} \quad x < 2 \\ \sqrt{5x-1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$.

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1, 3)$.

c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas en sus dominios, cuando $x < 2$ es un polinomio y cuando $x \geq 2$ el polinomio $5x-1$ es siempre positivo y la raíz siempre existe y es continua. Hay que estudiar la continuidad en $x = 2$:

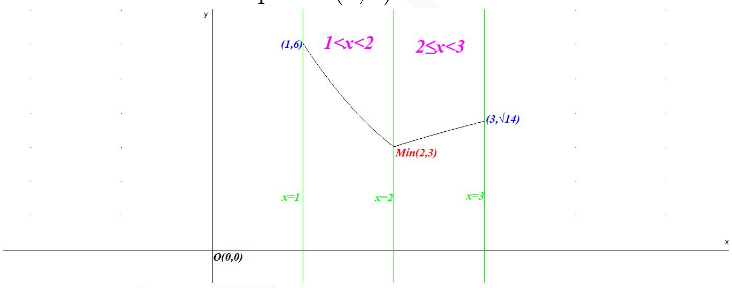
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 6x + 11) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{5x-1} = 3 \\ f(2) = 3 \end{cases} \xRightarrow{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)}$$

f continua en $x = 2 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$.

b) $$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 3 \text{ No válida} & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{5}{2\sqrt{5x-1}} > 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}.$$

	$(1, 2)$	$(2, 3)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(2, 3)$, y decreciente en el intervalo $(1, 2)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(2, 3)$.



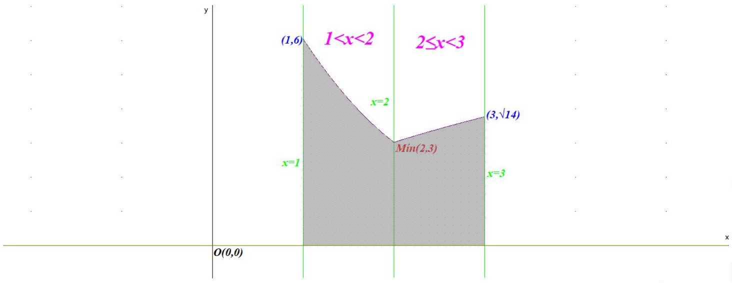
c) Hay dos recintos de integración $S_1 : [1, 2]$ en la primera rama y $S_2 : [2, 3]$ para la segunda.

$$S_1 = \int_1^2 (x^2 - 6x + 11)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x\right]_1^2 = \frac{13}{3}$$

$$F(x) = \int \sqrt{5x-1}\, dx = \left[\begin{array}{l} t = 5x - 1 \\ dt = 5dx \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{array}\right] = \int \sqrt{t}\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int t^{1/2} dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} = \frac{2(5x-1)^{3/2}}{15}$$

$$S_2 = \int_2^3 \sqrt{5x-1}\, dx = F(3) - F(2) = -\frac{18}{5} + \frac{28\sqrt{14}}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{11 + 28\sqrt{14}}{15} \simeq 7,71776\ u^2$$



Problema 14.1.4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0,75 punto) (0.5 puntos) Estudiar la paridad de la función $g(x) = f(xf(x))$

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

a) $g(-x) = f(-xf(-x)) \overset{f(-x)=-f(x)}{=} f(xf(x)) = g(x) \Longrightarrow g$ es par.

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2\sqrt{4+3f(x)}} = \frac{3\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{4}} = \frac{3\pi}{8}$$

c) $$F(x) = \int x\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \Longrightarrow v = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] =$$

$$-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi}\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = -\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{4}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{4}{\pi^2}$$

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 14.1.5 (2,5 puntos) Sean los puntos $A(0,0,0)$ y $B(1,1,1)$, y la recta $r \equiv (x,y,z) = (\lambda, \lambda, \lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B.

c) (0,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A.

Solución:

a) Se trata de calcular un plano mediador, el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(A, P) = d(B, P)$:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2} \Longrightarrow$$

$$\pi : 2x + 2y + 2z - 3 = 0$$

b) $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 1) \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rB} = (1, 1, 1) - (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{P_rB} = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y = 0$$

c) $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_s = A(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 14.1.6 (2,5 puntos) Dados los tres planos $\pi_1 : -2x - 2y + z = 0$; $\pi_2 : -2x + y - 2z = 0$ y $\pi_3 : x - 2y - 2z = 0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

b) (1,5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{u_{\pi_1}} = (-2, -2, 1)$, $\overrightarrow{u_{\pi_2}} = (-2, 1, -2)$ y $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, -2, -2)$. Tenemos:

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (-2, -2, 1) \cdot (-2, 1, -2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}}$$
$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (-2, -2, 1) \cdot (1, -2, -2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_3}}$$
$$\overrightarrow{u_{\pi_2}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (-2, 1, -2) \cdot (1, -2, -2) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_3}}$$

Los planos son perpendiculares dos a dos.
Tenemos el sistema homogéneo formado por los tres planos:

$$\begin{cases} -2x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango(A)=3= nº incógnitas$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única) y por ser homogéneo la solución es la trivial $x = y = z = 0 \Longrightarrow O(0, 0, 0)$ es el punto de corte de los tres planos.

b) ☛ Calculamos una recta $r \perp \pi_1$ que contenga a Q_1:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} = (-2, -2, 1) \\ P_r = Q_1(1/3, 4/3, 10/3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - 2\lambda \\ y = \dfrac{4}{3} - 2\lambda \\ z = \dfrac{10}{3} + \lambda \end{cases}$$

☛ Calculamos una recta $s \perp \pi_2$ que contenga a Q_2:

$$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (-2,1,-2) \\ P_s = Q_2(-1/3, 8/3, 5/3) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} - 2\mu \\ y = \dfrac{8}{3} + \mu \\ z = \dfrac{5}{3} - 2\mu \end{cases}$$

☛ El punto P es el de corte entre r y s

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} - 2\lambda = -\dfrac{1}{3} - 2\mu \\ \dfrac{4}{3} - 2\lambda = \dfrac{8}{3} + \mu \\ \dfrac{10}{3} + \lambda = \dfrac{5}{3} - 2\mu \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

☛ $P\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}\right) = (1,2,3)$

Para calcular el punto Q_3 seguimos el siguiente método:

c) ☞ Calculamos una recta $t \perp \pi_3$ tal que $P \in t$:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1,-2,-2) \\ P_t = P(1,2,3) \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

☞ Calculamos el punto Q_3 de corte de t con π_3:
$(1+\lambda) - 2(2-2\lambda) - 2(3-2\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow Q_3(2,0,1)$

Bloque 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Problema 14.1.7 (2,5 puntos) Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73,2 %.

a) (1,5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0,5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

Solución:

a) Tenemos una binomial $B(n; 1-0,732) = B(n; 0,268)$ y tenemos que calcular $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1))$ y tenemos dos casos:

☛ Si se reúnen $5 \Longrightarrow B(5; 0,268)$:
$$P(X>1) = 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0,268^0 \cdot 0,732^5 + \binom{5}{1} \cdot 0,268^1 \cdot 0,732^4\right] = 0,40511 < 0,5 \Longrightarrow$$
no se tiene que restringir esta reunión.

☛ Si se reúnen $7 \Longrightarrow B(7; 0,268)$:
$$P(X>1) = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot 0,268^0 \cdot 0,732^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,268^1 \cdot 0,732^6\right] = 0,5988 > 0,5 \Longrightarrow$$
hay que restringir esta reunión.

b) Tenemos $p = 0,732$, $n = 500 \geq 30$, $np = 366 \geq 5$ y $nq = 135 \geq 5$ luego:

$$B(500; 0,732) \overset{N\left(np, \sqrt{npq}\right)}{\approx} N\,(366; 9,904)$$

$$P(X \geq 350) = P\left(Z \geq \frac{349,5 - 366}{9,904}\right) = P(Z \geq -1,67) = P(Z \leq 1,67) = 0,9525$$

Capítulo 15

Murcia

15.1. Modelo

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un **máximo de 4 cuestiones, una de cada problema**, y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responden las 2 cuestiones de un apartado, solo se corregirá la primera que aparezca en el cuadernillo de respuestas. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Problema 15.1.1 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2000 puntos	Masters 1000 = 1000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

b) Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por $1's$ y $-1's$ y cumple que $\cdot A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

b.1 (1 punto) Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b.2 (0,75 puntos) Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

b.3 (0,75 puntos) Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Solución:

a) Sean x los Grand Slam ganados, y los Masters 1000 y z los ATP 500.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=10\\ 2000x+1000y+500z=10000\\ z-1=\dfrac{x+y}{2}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=10\\ 4x+2y+z=20\\ x+y-2z=-2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \text{ Grand Slam}\\ y=4 \text{ Masters 1000}\\ z=4 \text{ ATP 500}\end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 4 & 2 & 1 & 20\\ 1 & 1 & -2 & -2\end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-4F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & -2 & -3 & -20\\ 0 & 0 & -3 & -12\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -3z=-12 \Longrightarrow z=4\\ -2y-12=-20 \Longrightarrow y=4\\ x+4+4=10 \Longrightarrow x=2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=4\\ z=4\end{array}\right.$$

b) b.1 Las dos matrices están formadas por unos y menos unos, habrá que comprobar si cumplen la segunda condición:

☛ $A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 2I \Longrightarrow$ es una matriz de Hadamard.

☛ $A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix} \neq 2I \Longrightarrow$ no es una matriz de Hadamard.

b.2 $|A\cdot A^t| = |A||A^t| = |A||A| = |A|^2 = |2I| = 4 \Longrightarrow |A| = \pm 2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b.3 $A\cdot A^t = 2I \Longrightarrow \dfrac{1}{2}A\cdot A^t = I \Longrightarrow A\cdot\left(\dfrac{1}{2}A^t\right) = I \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{2}A^t$

Problema 15.1.2 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) Calcule los siguientes límites:

a.1 (1 punto) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$

a.2 (0,75 puntos) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)$

a.3 (0,75 puntos) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

b) b.1 (1,5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$

b.2 (1 punto) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2\sin x$.

Solución:

a) a.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\sin 3x+2\sin 2x}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-9\cos 3x+4\cos 2x}{2} = -\dfrac{5}{2}$

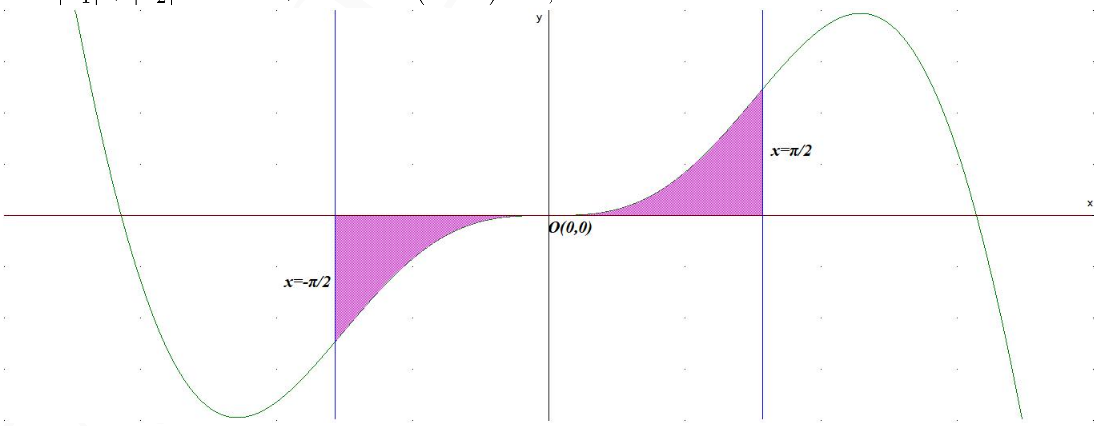
a.2 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=0$

a.3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

b) b.1 $\int x^2\sin x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x^2\Longrightarrow du=2xdx\\ dv=\int \sin x\,dx\Longrightarrow v=-\cos x\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx=$

$\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=\int \cos x\,dx\Longrightarrow v=\sin x\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int \sin x\,dx\right]=$
$-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C=$
$(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

b.2 Buscamos posible punto de corte de $f(x)$ con OX en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$:
$x^2\sin x=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow$ hay dos recintos de integración $S_1:\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ y $S_2:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
$S_1=\int_{-\pi/2}^{0}f(x)\,dx=\left.(2-x^2)\cos x+2x\sin x\right]_{-\pi/2}^{0}=2-\pi$
$S_2=\int_{0}^{\pi/2}f(x)\,dx=\left.(2-x^2)\cos x+2x\sin x\right]_{0}^{\pi/2}=\pi-2$
$S=|S_1|+|S_2|=\pi-2+\pi-2=2(\pi-2)\simeq 2,2832\ u^2$



Problema 15.1.3 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:**

a) Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a.1 (1 punto) Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.

a.2 (0,5 punto) Calcule la distancia de la recta r al plano π.

a.3 (1 punto) Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

b) Considere las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x + 2y = 13 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} y + 2z = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

b.1 (1 punto) Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b.2 (0,5 puntos) Compruebe que el punto $P(0, 3, 0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

b.3 (1 punto) Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Solución:

a) a.1 $r : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{0} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases}$

Sustituimos r en π:

$$\lambda + (1 - \lambda) + 0 = -1 \Longrightarrow !1 = -1! \Longrightarrow r \parallel \pi$$

a.2 $d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \dfrac{|0 + 1 + 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ u$

a.3 $\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 0) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x + y - 2z - 1 = 0$

b)

$$r : \begin{cases} x + 2y = 13 \\ z = 2 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 13 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, 0) \\ P_r(13, 0, 2) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} y + 2z = 4 \\ -x + y = 3 \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-2, -2, 1) \\ P_s(1, 4, 0) \end{cases}$$

b.1 $\overrightarrow{P_sP_r} = (13, 0, 2) - (1, 4, 0) = (12, -4, 2)$

$\left[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 12 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Longrightarrow r$ y s se cruzan.

b.2 Sustituyendo $P(0, 3, 0)$ en r:

$\begin{cases} 0 + 6 \neq 13 \\ 0 \neq 2 \end{cases} \Longrightarrow P \notin r.$

Sustituyendo $P(0, 3, 0)$ en s:

$\begin{cases} 3 + 0 \neq 4 \\ 0 + 3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow P \notin s.$

b.3 $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2, 1, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (-2, -2, 1) \\ P(0, 3, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y + 6z - 6 = 0$

Problema 15.1.4 (2,5 puntos) **Resuelva solo uno de los apartados a o b siguientes:.**

a) El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a.1 (0,5 puntos) Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?

a.2 (0,75 puntos) Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?

a.3 (0,5 puntos) Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?

a.4 (0,75 puntos) Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

b) Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68 % de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87 % tiene un CI menor que 102,5.

b.1 (0,5 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

b.2 (1 punto) Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?

b.3 (1 punto) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución:

a) a.1 $P(\text{gana Ana}) = P(\text{Ana saca } 4) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} = 0,6667$

a.2 $P(\text{gana Bea}) = 1 - P(\text{gana Ana}) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow B\left(8, \dfrac{1}{3}\right)$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$

$1 - \left[\binom{8}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 + \binom{8}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \binom{8}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6\right] = 0,5318$

a.3 $P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci saca 2 y Ana saca } 0) + P(\text{Ceci saca } 6) = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{5}{9} = 0,5556$

a.4 Los sucesos serían:

- $X \equiv$ Ana saca un 4, Ceci saca un 6 y Delia saca un 1
- $Y \equiv$ Ana saca un 4, Ceci saca un 6 y Delia saca un 5
- $Z \equiv$ Ana saca un 4, Ceci saca un 2 y Delia saca un 5

$P(\text{Ana no gana ni pierde}) = P(X) + P(Y) + P(Z) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{9} = 0,4444$

b) $N(\mu, \sigma)$

b.1 $P(102,5 \le X \le 115) = P(X \le 115) - P(X \le 102,5) = (1 - P(X \ge 115)) - P(X \le 102,5) = (1 - 0,0668) - 0,5987 = 0,3345$

b.2 $p = P(X \le 115) = 1 - 0,0668 = 0,9332 \Longrightarrow B(6; 0,9332)$

$P(X \ge 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0,9332^5 \cdot 0,0668^1 + \binom{6}{6} 0,9332^6 \cdot 0,0668^0 = 0,9441$

b.3 $P(X \ge 115) = 0,0668 \Longrightarrow P\left(Z \ge \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 0,0668 \Longrightarrow P\left(Z \le \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9332 \Longrightarrow \frac{115 - \mu}{\sigma} = 1,5 \Longrightarrow \mu + 1,5\sigma = 115$

$P(X \le 102,5) = 0,5987 \Longrightarrow P\left(Z \le \frac{102,5 - \mu}{\sigma}\right) = 0,5987 \Longrightarrow \frac{102,5 - \mu}{\sigma} = 0,25 \Longrightarrow \mu + 0,25\sigma = 102,5$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu + 1,5\sigma = 115 \\ \mu + 0,25\sigma = 102,5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 100 \\ \sigma = 10 \end{array} \right.$$

Capítulo 16

Navarra

16.1. Modelo

Sin examen modelo.

Capítulo 17

País Vasco

17.1. Modelo

Este examen tiene CINCO ejercicios, de 2,5 puntos cada uno. EL PRIMER EJERCICIO ES OBLIGATORIO y de los otros cuatro debes elegir TRES.
En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
Las respuestas deben escribirse con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.
No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Problema 17.1.1 (2,5 puntos) **EJERCICIO OBLIGATORIO**
Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.
Identifica la distribución correspondiente al número de adultos que quedan protegidos, y determina sus parámetros.
Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.
Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.
¿La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva entre 1750 y 1850 en adultos puede ser 0,0037? Razona tu respuesta.

Solución:

☛ Se trata de $B(3289; 0,54)$. Como $n \geq 30$, $np = 1776,06 > 5$ y $nq = 1512,94 > 5 \Longrightarrow B(3289; 0,54) \overset{N(np,\sqrt{npq})}{\approx} N(1776,06; 28,583)$

☛ $P(X = 1800) = P\left(\dfrac{1799,5 - 1776,06}{28,583} \leq Z \leq \dfrac{1800,5 - 1776,06}{28,583}\right) = P(0,82 \leq Z \leq 0,86) = P(Z \leq 0,86) - P(Z \leq 0,82) = 0,8051 - 0,7939 = 0,0112$

☛ $P(X < 1700) = P\left(Z \leq \dfrac{1699,5 - 1776,06}{28,583}\right) = P(Z \leq -2,68) = 1 - P(Z \leq 2,68) = 1 - 0,9963 = 0,0037$

☛ $P(1750 < X < 1850) > P(X = 1800) = 0,0112 \Longrightarrow P(1750 < X < 1850) \neq 0,0037$

Problema 17.1.2 (2,5 puntos) Responde solo a uno de los dos apartados.

a) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3 \\ \alpha x - 5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

b) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores del parámetro m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ m & 2-m & 2 & 1 \\ m & -2 & m-2 & 1 \end{pmatrix},$$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 4 & 1 & 3 \\ \alpha & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 26 - 26\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$$

☛ Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

☛ Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

I) Cuando $\alpha = 0$:

$$\begin{cases} 4y + z = 3 \\ -5y + 2z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{8}{13} \\ z = \dfrac{7}{13} \end{cases}$$

II) Cuando $\alpha = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4y + z = 3 \\ -9y + z = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{7}{9} - \dfrac{13}{9}\lambda \\ y = \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{9}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

b) $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ m & 2-m & 2 \\ m & -2 & m-2 \end{vmatrix} = 0$; $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ m & 1 & 2 \\ m & 1 & m-2 \end{vmatrix} = -m^2 + 5m - 4 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 4$;

$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 2-m & 1 \\ m & -2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 4 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 4$;

$|A_4| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2-m & 2 & 1 \\ -2 & m-2 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 5m - 4 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 4$

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 4\} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- ☛ Si $m = 1 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
- ☛ Si $m = 4 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos).

Problema 17.1.3 (2,5 puntos) Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

a) Se consideran las siguientes rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right. \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

Calcula la posición relativa de las rectas r y s.
Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
Dado el punto $P(-8, -8, 0)$, calcula el punto Q de la recta r de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta r.

b) Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{array} \right. \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10$$

Calcula el valor del parámetro A para que la recta r y el plano π sean paralelos.
Si $A = 21$, calcula la intersección del plano π y la recta r.
Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

Solución:

a)

$$r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-1+4\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,4,-1) \\ P_r(0,-1,2) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} 2x-y=1 \\ z=3 \end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=3 \end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,2,0) \\ P_s(0,-1,3) \end{cases}$$

I) $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,-1,3)-(0,-1,2)=(0,0,1)$
$[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_r}]=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$ y Rango$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=2 \Longrightarrow r$ y s se cortan.

II) $\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,4,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,0) \\ P_r(0,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2x-y-1=0$

III) $Q(2\lambda,-1+4\lambda,2-\lambda) \Longrightarrow \overrightarrow{PQ}=(8+2\lambda,7+4\lambda,2-\lambda)$
$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{u_r} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{u_r}=0 \Longrightarrow$
$(8+2\lambda,7+4\lambda,2-\lambda)\cdot(2,4,-1)=16+4\lambda+28+16\lambda-2+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow$
$Q(-4,-9,4)$

b)

$$r:\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+4z=1 \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=-2+7\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(3,7,1) \\ P_r(-1,-2,0) \end{cases} \quad \text{y } \overrightarrow{u_\pi}=(2,-3,A)$$

I) $r\parallel\pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\perp\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}=0 \Longrightarrow (3,7,1)\cdot(2,-3,A)=6-21+A=0 \Longrightarrow A=15$
Luego $\pi: 2x-3y+15z=10$, para que $r\parallel\pi$ tiene que cumplir $r\not\subset\pi \Longrightarrow P_r\notin\pi$, es decir $2\cdot(-1)-3\cdot(-2)+15\cdot 0=-2+6+0=4\neq 10 \Longrightarrow r\parallel\pi$

II) Sustituimos r en $\pi: 2x-3y+21z=10$:
$2(-1+3\lambda)-3(-2+7\lambda)+21\lambda=10 \Longrightarrow \lambda=1 \Longrightarrow H(2,5,1)$

III) Si $A=1 \Longrightarrow \pi: 2x-3y+z=10$ y seguimos el siguiente método:

- ☛ Calculamos una recta $t\perp\pi$ tal que $O\in t$

$$t:\begin{cases} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,-3,1) \\ P_t=O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow t:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

- ☛ Calculamos el punto O' de corte de t con π:
$2(2\lambda)-3(-3\lambda)+\lambda=10 \Longrightarrow \lambda=\frac{5}{7} \Longrightarrow O'\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)$

- ☛ El punto simétrico O'' de O respecto del plano π cumple:
$\frac{O+O''}{2}=O' \Longrightarrow O''=2O'-O=2\left(\frac{10}{7},\frac{-15}{7},\frac{5}{7}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{20}{7},\frac{-30}{7},\frac{10}{7}\right)$

Problema 17.1.4 (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

a) Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$ son paralelas. Además, f tiene un extremo relativo cuando $x = 1$ y $f(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$
Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.
Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ para los valores de los parámetros $A = -3$, $B = 0$ y $C = 4$.

b) Sea $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.
Encuentra los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
Encuentra los extremos relativos de f y razona si son máximos o mínimos.
Calcula las asíntotas de f.

Solución:

a) $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \Longrightarrow f''(x) = 6x + 2A$

I) $\begin{cases} f'(-1) = f'(2) \Longrightarrow 3 - 2A + B = 12 + 4A + B \Longrightarrow -2A = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3 + 2A + B = 0 \Longrightarrow B = -3 - 2A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{2} \\ B = 0 \end{cases}$

$f''(x) = 6x - 3 \Longrightarrow f''(1) = 3 \neq 0 \Longrightarrow x = 1$ es un extremo.

$f(0) = C = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}}{1} = 2 \Longrightarrow C = 2$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

II) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\begin{cases} a = -1 \Longrightarrow b = f(a) = f(-1) = 0 \\ m = f'(a) = f'(-1) = 9 \end{cases} \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 0 = 9(x+1) \Longrightarrow y = 9x + 9$

b) I) $f'(x) = 2e^{-2x^2}(1 - 4x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y decreciente en el $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.

II) La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, e^{-1/2}\right)$ y un mínimo relativo en el $\left(-\dfrac{1}{2}, -e^{-1/2}\right)$

III) Asíntotas:

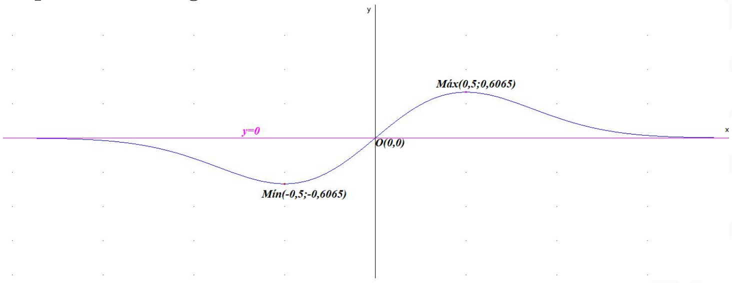
- Verticales: No tiene,
- Horizontales: $y = 0$ ya que

$$\lim_{x\to -\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to \infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to \infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = 0$$

☛ Oblicuas: no hay por haber horizontales.

Representación gráfica:



CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Problema 17.1.5 (2,5 puntos) Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

a) Calcula las dos integrales siguientes:

a.1 $\displaystyle\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}\,dx$ $\qquad$ a.2 $\displaystyle\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}\,dx$

b) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$

b.1 Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas

b.2 Calcula el área de ese recinto.

Solución:

a) a.1

$$\begin{array}{rrrr} \big(\; x^3 & & -3x & +2\big) : \big(x^2+2x+1\big) = x-2+\dfrac{4}{x^2+2x+1} \\ -x^3 & -2x^2 & -x & \\ \hline & -2x^2 & -4x & +2 \\ & 2x^2 & +4x & +2 \\ \hline & & & 4 \end{array}$$

$$\int \frac{2-3x+x^3}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(x-2+4(x+1)^{-2}\right)\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{4}{x+1} + C$$

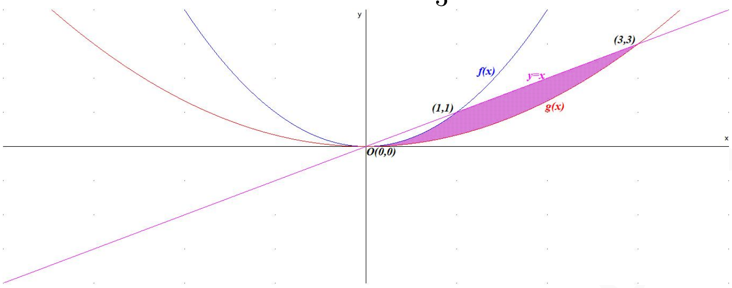
$$\text{a.2} \int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}\,dx = \left[\begin{array}{c} \dfrac{2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{A+B(x+1)}{(x+1)^2} \\ 2-3x = A+B(x+1) \\ x=0 \Longrightarrow A+B=2 \\ x=-1 \Longrightarrow A=5 \Longrightarrow B=-3 \\ \dfrac{2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2} - \dfrac{3}{x+1} \end{array} \right] =$$

$$\int \left(5(x+1)^{-2} - \frac{3}{x+1}\right)\,dx = -\frac{5}{x+1} - 3\ln|x+1| + C$$

b) b.1 Se trata de dos parábolas verticales con vértice en el origen de coordenadas y la recta bisectriz del primer cuadrante. Con una simple tabla de valores se dibujan estas curvas y la recta. Llamamos $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{3}$

El punto de corte de f con la recta: $x^2 = x \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1 \Longrightarrow (0,0)$ y $(1,1)$

El punto de corte de g con la recta: $\dfrac{x^2}{3} = x \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3 \Longrightarrow (0,0)$ y $(3,3)$



b.2 Hay dos áreas:

$S_1 : [0,1]$ entre f y g con f por encima.

$S_2 : [1,3]$ entre la recta $y = x$ y g con la recta por encima.

$$S_1 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^2\, dx = \left. \frac{2x^3}{9} \right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

$$S_2 = \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{1}{3} \int_1^3 (3x - x^2)\, dx = \left. \frac{1}{3} \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{7}{18} = \frac{10}{9}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2}{9} + \frac{10}{9} = \frac{4}{3} \simeq 1,3333\ u^2$$

Capítulo 18

Resúmenes teóricos

18.1. Álgebra

Matrices

matriz A	dimensión	Transpuesta A^T	dimensión
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$	$n \times m$
matriz cuadrada	orden	identidad	matriz triangular
$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	n	$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

☛ **Suma:** Tienen que tener la misma dimensión y se suman término a término.

☛ **Producto de una matriz por un número real:** Se multiplican todos los términos de la matriz por ese número.

☛ **Producto de dos matrices:** Se desarrolla multiplicando matriz fila por matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

El número de columnas de la primera matriz tiene que ser igual al número de filas de la segunda.

Determinante de una matriz

☛ La matriz tiene que ser cuadrada

a) De orden dos: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) De orden tres: (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

- Propiedades:

a) $\begin{vmatrix} a+m & b+n & c+p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & p \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

b) $|A^T| = |A|$

c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

d) Si cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo.

e) Si una fila o una columna tiene todos sus elementos igual a cero el determinante vale cero.

f) Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante vale cero.

g) Si dos filas o dos columnas son proporcionales el determinante vale cero.

h) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras el determinante vale cero.

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+a & h+b & i+c \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ xa & xb & xc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+xa & h+xb & i+xc \end{vmatrix}$, es decir, si a una fila multiplicada por un número (o a una columna) le sumamos otra fila (u otra columna) el determinante no varía.

Matriz Adjunta:

- Adjunto del elemento a_{ij} de una matriz es el valor del determinante resultante de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por $(-1)^{i+j}$ y se le denomina A_{ij}.

- Matriz adjunta. $Adj(A) = (A_{ij})$

Cálculo del determinate de una matriz por adjuntos:
Se elige una fila o una columna (cualquiera es válida, siempre será mejor aquella que tenga más ceros), escojo la primera fila para el ejemplo:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Inversa de una matriz:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$$

Una matriz tiene inversa si, y sólo si, $|A| \neq 0$.
A las matrices que tienen inversa se la llama **Regulares** y a las que no la tienen se las llama **Singulares**.

Rango de una matriz
Es el número de filas linealmente independientes.
De forma práctica se calcula por determinantes. Si tenemos una matriz de dimensión 3×4 cogemos matrices cuadradas que tengan el mayor orden posible, tendremos cuatro de orden 3, si el determinante de alguna de ellas es distinto de cero el rango es 3 y habremos terminado, si por el contrario todas son cero el rango ya no puede ser 3 y buscaremos menores de orden 2. Si alguno de estos menores es distinto de cero ya habremos terminado, y el rango será 2, si por el contrario todos son cero tendremos que buscar menores de orden 1, y en el momento que encontremos alguno distinto de cero el rango será 1.

Sistema de Ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \quad = & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \cdots & +a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

Matriz del sistema: $A = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$

Matriz ampliada: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

Matriz de variables: $X = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\right)$,

Matriz de términos independientes: $B = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right)$

Se trata de una ecuación matricial: $AX = B$.
Si $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ y en este caso el sistema se podrá resolver de la siguiente manera $X = A^{-1}B$

Antes de resolver un sistema estudiar si hay ecuaciones nulas, iguales o proporcionales, para el estudio del rango.

Teorema de Rouché

- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) = nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Determinado (SCD). Y tiene solución única.
- Si Rango($\overline{A}$) =Rango(A) $<$ nº de incógnitas se trata de un Sistema Compatible Indeterminado (SCI). Y tiene infinitas soluciones.
- Si Rango($\overline{A}$) $\neq$Rango(A) se trata de un Sistema Incompatible. Y no tiene solución.

Sistema homogéneos Son aquellos en los que $b_i = 0$, estos siempre tienen solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial, pero en el caso de que de que Rango(A) $< m$ (nº de incógnitas) estaríamos ante infinitas soluciones, es decir:

- ☛ Si Rango$(A) = m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCD $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ solución trivial.

- ☛ Si Rango$(A) < m$ (nº de incógnitas) $\Longrightarrow$ SCI $\Longrightarrow$ infinitas soluciones.

Regla de Cramer
Sea $\overline{A} = (C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, B)$, entoces sustituimos la columna B en la matriz $\overline{A}$ por cada una de las columnas y tendremos:

$$x_1 = \frac{|B, C_2, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|C_1, B, C_3, \cdots, C_n|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|C_1, C_2, \cdots, B|}{|A|}$$

18.2. Geometría

Vectores
Sean $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$

- ☛ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente independientes si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$. En caso contrario uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

- ☛ Producto escalar: $\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos\alpha \end{cases}$

- ☛ Producto vectorial: $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$; el vector $\overrightarrow{t}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Se cumple $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\sin\alpha$.
  $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = S$ donde S es el área del paralelogramo que describen los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ por paralelelismo. (El área de un triángulo será $\frac{1}{2}S$)

- ☛ Producto mixto: $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = V$, donde V es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores por paralelismo. El volumen de un paralelepípedo es también $V = S_{\text{base}} \cdot$Altura. Para calcular el volumen de un tetraedro tenemos dos fórmulas: $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}V_{\text{paralelepípedo}}$ y $V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3}S_{\text{base}} \cdot$ Altura

Ecuaciones
Sea la recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (u_1, u_2, u_3) \\ P_r(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P_r + \lambda\overrightarrow{u_r}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases}$	$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} = \frac{z-c}{u_3}$	No hay

Sea el plano $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ P(a, b, c) \end{cases}$

Vectorial	Paramétrica	Continua	General
$\overrightarrow{x} = P + \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$	$\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	No hay	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a \\ u_2 & v_2 & y-b \\ u_3 & v_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$ $Ax + By + Cz + D = 0$

Ideas:

- Tres puntos $P_1(a_1, b_1, c_1)$, $P_2(a_2, b_2, c_2)$ y $P_3(a_3, b_3, c_3)$ no están alineados si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$
- El vector $\overrightarrow{u_r}$ y la recta r tienen la misma dirección.
- El vector $\overrightarrow{u_\pi} = (A, B, C)$ y el plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ son perpendiculares.

Posiciones de rectas y planos:

- Dos rectas: $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Construimos la matriz $A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$.

  Si Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ Se cruzan.

  Si Rango$(A) = 2$: $\begin{cases} \text{Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow \text{Se cortan} \\ \text{Rango} \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1 \Longrightarrow \text{Son paralelas} \end{cases}$.

  Si Rango$(A) = 1 \Longrightarrow$ Coinciden.

- De una recta $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$ y un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$: Se pasa la recta a paramétricas y se sustituye en el plano: $A(a + \lambda u_1) + B(b + \lambda u_2) + C(c + \lambda u_3) + D = 0$ Al resolver esta ecuación pueden ocurrir tres casos:

  a) Encuentro un valor de $\lambda = k \Longrightarrow$ se cortan. El punto de corte se encuentra sustituyendo el valor de λ en la ecuación paramétrica de la recta.

  b) Encuentro infinitos valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta se encuentra contenida en el plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $0 = 0$)

  c) No existen valores de $\lambda \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano. (La solución de la ecuación queda de la forma $7 = 0$)

- De dos planos $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ y $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2$. Puede ocurrir:

  a) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ o $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ o $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ en cualquiera de ellos los dos planos se cortan en una recta.

  b) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \neq \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso son paralelos.

  c) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ en este caso coinciden.

- De tres planos $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ y $\pi_3 : A_3x+B_3y+C_3z+D_3$. Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y se discute por el teorema de Roché. Si el sistema tiene solución única los tres planos se cortan en un punto. En el caso de que tenga infinitas soluciones se analizan los planos dos a dos. En el caso de que no tenga soluciones se analizan los planos dos a dos.

Fórmulas:

- Distancia entre dos puntos: $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$
- Distancia de un punto a una recta: $d(P,r) = \dfrac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$
- Distancia de un punto a un plano: $d(P,\pi) = \dfrac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Distancia entre dos rectas que se cruzan: $d(r,s) = \dfrac{|[\overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|}$
- Ángulo entre dos vectores: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$
- Ángulo entre dos rectas: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_r}|}$
- Ángulo entre dos planos: $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}$
- Ángulo entre una recta y un plano: $\sin\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_\pi}|}$
- Punto medio de P y Q es $A = \dfrac{P+Q}{2}$
- Punto simétrico de P respecto de Q es $A = 2Q - P$
- Esfera: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ es una esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio$= r$.

Ideas métricas:

- Punto simétrico de P respecto al plano π:
  - Calculo r que pasa por P perpendicular a π, $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$
- Punto simétrico de P respecto a la recta r:
  - Calculo π perpendicular a r que contenga a P, $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}$.
  - Calculo el punto de corte P' de r con π.
  - $P'' = 2P' - P$

☛ Recta perpendicular a otras dos que se cruzan (y las corta): Se calcula como intersección de los dos planos $\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \end{cases}$, $\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \end{cases}$
donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$

☛ Recta que pasa por un punto P y corta a dos rectas que se cruzan: Se calcula como intersección de los dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_rP} \\ \overrightarrow{u_r} \\ P_r \text{ o } P \end{cases} \quad , \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} \\ \overrightarrow{u_s} \\ P_s \text{ o } P \end{cases}$$

☛ Recta paralela a un plano π y que corta a otra recta t que a su vez corta a π y que pasa por el punto P:

- Calculo un plano π' paralelo a π que contenga a P.
- Calculo P' punto de corte de π' y t.
- La recta buscada es la que une los puntos P y P'.

☛ Ecuación de la circunferencia resultante de cortar una esfera con un plano (vertical u horizontal). Si el plano es $z = k$, se sustituye en la ecuación y resulta una circunferencia. Tened cuidado, el centro de esta circunferencia es (a, b, k).

☛ Plano tangente a una esfera de centro C en el punto de tangencia P: $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{CP} \\ \text{Contiene a } P \end{cases}$

☛ Encontrar los puntos de una recta r que están a una distancia λ de un punto P: Se calcula la ecuación de una esfera de centro P y radio λ. Se buscan los puntos de corte de esta esfera y la recta r.

☛ Plano Mediador π entre dos puntos P_1 y P_2: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, P_1) = d(P, P_2)$.

☛ Plano Bisector π entre dos planos π_1 y π_2:Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ que cumplen $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$.

18.3. Análisis

Tabla de Derivadas

función	derivada	función	derivada
$y = k$	$y' = 0$	$y = x$	$y' = 1$
$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$	$y = au^n$	$y' = nau^{n-1}u'$
$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$
$y = u^v$	$y' = u^v(v' \ln u) + vu^{v-1}u'$	$y = a^u$	$y' = u'a^u \ln a$
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \tan u$	$y' = u' \sec^2 u$
$y = \cot u$	$y' = -u' \csc^2 u$	$y = \csc u$	$y' = -u' \csc u \cot u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sec u \tan u$	$y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$y = \arctan u$	$y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	Regla de la Cadena	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$

Representación gráfica de funciones

Hay que seguir los siguientes pasos:

1 Dominio	Buscar Puntos Singulares	2 Signo	$f(x) > 0$ o $f(x) < 0$
3 Ptos. Corte	Corte con OX : $f(x) = 0$ Corte con OY : $x = 0$	4 Simetría :	Par : $f(-x) = f(x)$ con OY Impar : $f(-x) = -f(x)$ con O
5 Asíntotas :	Verticales : $x = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow p} f(x) = \pm\infty$ Horizontales : $y = p$ $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = p$ Si $\exists\, y = p \Longrightarrow$ No Oblicuas Oblicuas : $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $n = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx)$	6 Monotonía :	Creciente : $f'(x) > 0$ $\nearrow$ Decreciente : $f'(x) < 0$ $\searrow$ Si $f'(p) = 0$ Punto Crítico : Máximo si $f''(p) < 0$ Mínimo si $f''(p) > 0$ Pto. Inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$
7 Máximos y Mínimos	Máximo : $\nearrow\searrow$ de creciente a decreciente Mínimo : $\searrow\nearrow$ de decreciente a creciente	8 Curvatura :	Cóncava : $f''(x) > 0$ $\cup$ Convexa : $f''(x) < 0$ $\cap$ Si $f''(p) = 0$ Punto Crítico : Pto. Inflexión si de Cóncava a Convexa de Convexa a Cóncava
9 Periodo :	$f(x + T) = f(x)$		

Tabla de Integrales Inmediatas

Tipo	Simple	Compuesta
Potencial $a \neq -1$	$\int x^a\, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\int f^a \cdot f'\, dx = \frac{f^{a+1}}{a+1}$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x \rvert$	$\int \frac{f'}{f}\, dx = \ln \lvert f \rvert$
Exponencial	$\int e^x\, dx = e^x$	$\int e^f \cdot f'\, dx = e^f$
Exponencial	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}$	$\int a^f \cdot f'\, dx = \frac{a^f}{\ln a}$
Seno	$\int \cos x\, dx = \sin x$	$\int f' \cdot \cos f\, dx = \sin f$
Coseno	$\int \sin x\, dx = -\cos x$	$\int f' \cdot \sin f\, dx = -\cos f$
Tangente	$\int \sec^2\, dx = \tan x$	$\int f' \cdot \sec^2 f\, dx = \tan f$
	$\int (1 + \tan^2 x)\, dx = \tan x$	$\int f' \cdot (1 + \tan^2 f)\, dx = \tan f$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x$	$\int \frac{f'}{\cos^2 f}\, dx = \tan f$
Cotangente	$\int \csc^2\, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot \csc^2 f\, dx = -\cot f$
	$\int (1 + \cot^2 x)\, dx = -\cot x$	$\int f' \cdot (1 + \cot^2 f)\, dx = -\cot f$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x$	$\int \frac{f'}{\sin^2 f}\, dx = -\cot f$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\, dx = \arcsin f$
	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\, dx = \arcsin \frac{f}{a}$
Arco coseno	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos x$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}\, dx = \arccos f$
	$\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arccos \frac{x}{a}$	$\int \frac{-f'}{\sqrt{a^2-f^2}}\, dx = \arccos \frac{f}{a}$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\, dx = \arctan f$
	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{f'}{a^2+f^2}\, dx = \arctan \frac{f}{a}$
Neperiano – Arcotangente	$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\, dx = \ln \pm \arctan x$	Si $M \neq 0$ ax^2+bx+c irreducible

Definición de Derivada

$$f'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Continuidad: Una función f es continua en un punto a si

$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

- ☛ Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \Longrightarrow$ Discontinua no evitable. (La función pega un salto en ese punto)

- ☛ Si $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) \neq f(a) \Longrightarrow$ Discontinua evitable. (La función tiene un agujero en ese punto)

Derivabilidad
Una función f es derivable en un punto a si $f'(a^-) = f'(a^+)$.

$$f'(a^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(a^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si f es una función derivable en un punto a, entonces f tiene que ser continua en a.
Teorema de Weierstrass
Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f alcanza un máximo y un mínimo en este intervalo.
Teorema de Darboux
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo.
Teorema de Bolzano
Si f es una función continua en el intervalo cerrado y no nulo $[a, b]$ $(a < b)$ y la función toma valores de distinto signo en los extremos de este intervalo (Si signo de $f(a)$ es positivo entonces signo de $f(b)$ es negativo o viceversa). Entonces la función pasa necesariamente por un punto que corta al eje de abscisas, es decir, $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
Teorema de Rolle
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Si además cumple que $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
Teorema del Valor Medio de Lagrange
Sea f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Primer Teorema Fundamental del Cálculo
Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Definimos en este intervalo la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \ \text{ donde } \ c \in [a, b]$$

En estas condiciones, si f es continua en c se cumple que F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.
Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)
Dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Teorema de integración por partes
Sean f y g dos funciones reales derivables en el intervalo $[a, b]$. En estas condiciones se cumple

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (sentado un día vi un valiente soldado vestido de uniforme)

Teorema del cambio de variable
Sea g una función con derivada g' continua en $[a, b]$, y sea f una función real y continua en el mismo intervalo. SI hacemos el cambio de variable $t = g(x)$ se cumple que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Límites cuando $x \longrightarrow \pm\infty$
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que Grado$(P(x)) = n$ y Grado$(Q(x)) = m$. Sea A el coeficiente del monomio de mayor grado de $P(x)$ y sea B el coeficiente del monomio de mayor grado de $Q(x)$

$$L = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x) = \pm\infty$ el signo depende del signo del coeficiente de mayor grado de este polinomio.
- Si $n > m \Longrightarrow L =$Signo$\left(\frac{A}{B}\right) \cdot \infty$
- Si $n < m \Longrightarrow L = 0$
- Si $n = m \Longrightarrow L = \frac{A}{B}$

Si $\lim_{x\longrightarrow\infty} P(x)^{Q(x)} = [1^\infty] = e^\lambda$, donde

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} Q(x)(P(x) - 1)$$

Regla de L'Hôpital Sean f y g dos funciones reales y derivables, entonces si

$$\lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \ o \ \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] \Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\longrightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Aproximaciones cuando $x \longrightarrow 0$

$\sin x \approx x$	$\tan x \approx x$	$e^x \approx 1 + x$	$\log(1 + x) \approx x$
$a^x \approx 1 + x \ln a$	$\arcsin x \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$	$\arccos \approx \frac{\pi}{2} - x$

18.4. Probabilidad

Frecuencia absoluta de un suceso A es el número de veces que se repite dicho suceso $\Longrightarrow f(A)$

Frecuencia relativa de un suceso A es la proporción de veces que ha sucedido A de N experiencias $\Longrightarrow f_r(A) = \dfrac{f(A)}{N}$

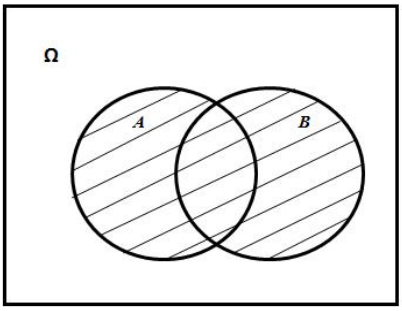
Ley de los grandes números: $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} f_r(A) = P(A)$

Ley de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$

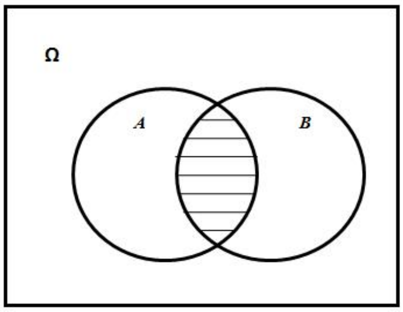
$\Omega \equiv$ **Espacio muestral** es el de todos los sucesos, sería el suceso seguro: $P(\Omega) = 1$.

$\emptyset \equiv$ **Espacio vacio** es el de ningún suceso, sería el suceso imposible: $P(\emptyset) = 0$.

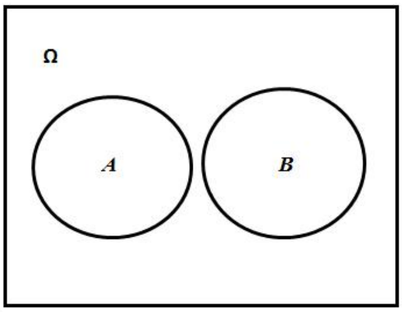
Diagramas de Venn: (esquemas usados en la teoría de conjuntos)



Unión de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos del conjunto A con todos los de B: $A \cup B$



Intersección de dos conjuntos: Es el total de todos los elementos comunes entre los conjuntos A y B: $A \cap B$



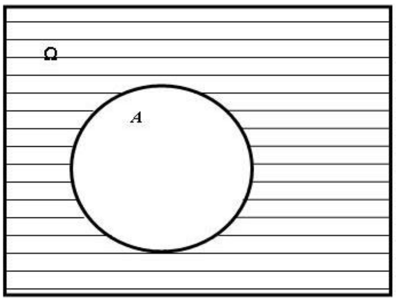
Sucesos Incompatibles: Dos sucesos son incompatibles si su intersección es vacía. $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso de que los dos sucesos sean incompatibles la fórmula quedaría:

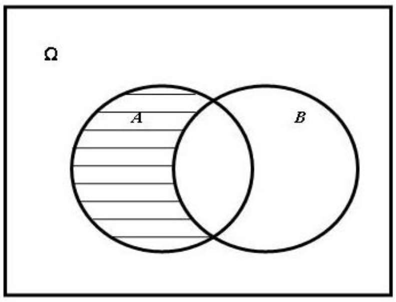
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Sucesos independientes: Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



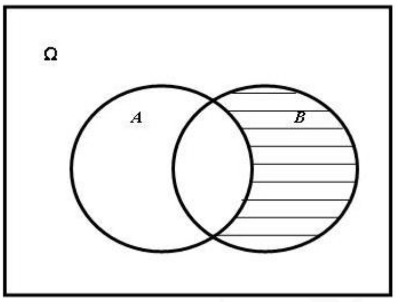
$\overline{A}$ es el suceso contrario o complementario de A:

$$\overline{A} = \Omega - A \Longrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$



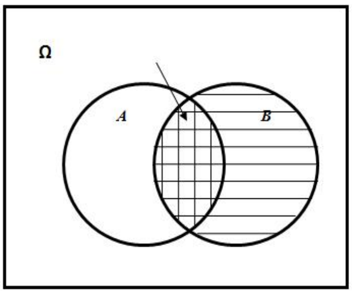
Leyes de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Probabilidad condicionada: es la probabilidad de que ocurra un suceso A sabiendo que ha ocurrido el suceso B: $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Teorema de Bayes: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ y los sucesos A_i con $i = 1, ..., 5$ son incompatibles dos a dos (intersección vacía), entonces:

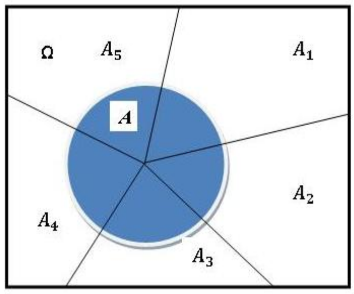
$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) + P(A_4)P(A|A_4) + P(A_5)P(A|A_5)$$



Probabilidad condicionada:

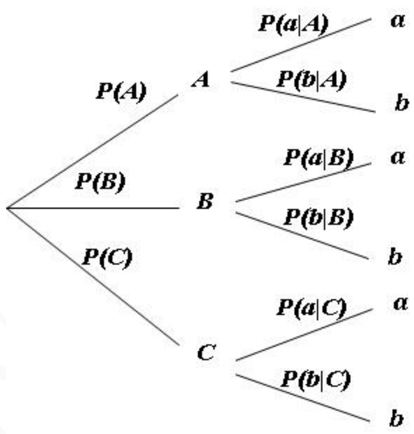
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

probabilidad total



$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)+P(A_3)P(A|A_3)+P(A_4)P(A|A_4)+P(A_5)P(A|A_5)$$

Organización por árboles:



Organización por tablas de contingencia:

	Renault	Seat	Mercedes	Totales
Blanco	15	20	10	45
Negro	300	455	200	955
	315	475	210	1000

$$P(B|S) = \frac{20}{475},\ \ P(N|M) = \frac{200}{210},\ \ P(B) = \frac{45}{1000},\ \ P(M) = \frac{210}{1000}$$

18.5. Estadística

Gráficos:

☛ Varable discreta: con diagrama de barras.

$$x_i,\ \ p(x_i) = p_i,\ \ \sum p_i = 1$$

$$\text{Media} = \mu = \sum x_i p_i,\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i - \mu^2$$

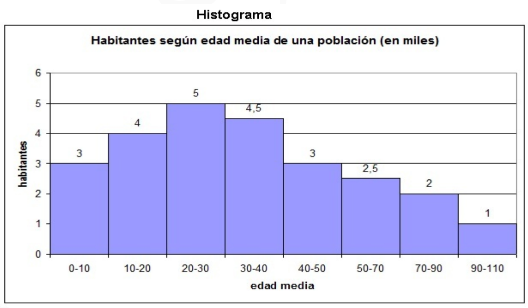
$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$

☛ Variable continua: histogramas (intervalos)

$$x_i,\ \ f_i,$$

$$\text{Media} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum x_i},\ \ \text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{X})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \overline{X}^2$$

$$\text{Desviación típica} = \sqrt{\text{Varianza}}$$



Distribución Binomial $B(n, p)$:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} p^a q^{n-a}$$

p es la probabilidad de éxito y $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Por ejemplo, si $B(7, 0, 4) \Longrightarrow n = 7$, $p = 0, 4$ y $q = 0, 6$:

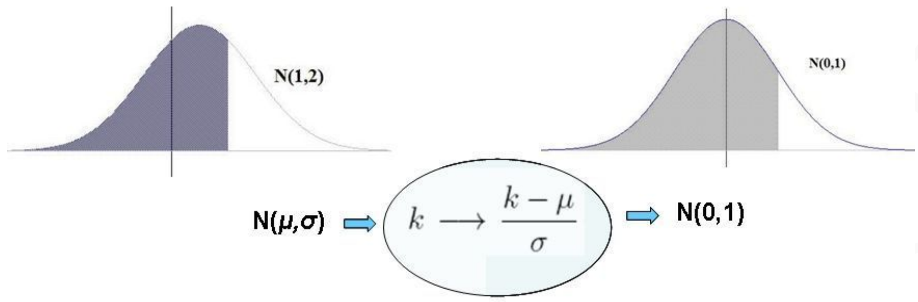
$$P(X = 2) = \binom{7}{2} 0,4^2 0,6^5 = 0,261$$

$$P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3),\ \text{ó}$$

$$P(X \le 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - (P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7))$$

Su Media= $\mu = np$, su Varianza= $\sigma^2 = npq$ y su Desviación Típica= $\sqrt{\text{Varianza}}$.
Distribución Normal $N(\mu, \sigma)$:

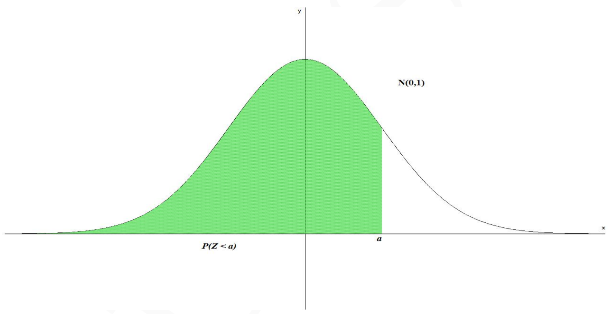
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Tipificación Paso de una normal N(μ, σ) a otra N$(0,1)$: $k \longrightarrow \dfrac{k-\mu}{\sigma}$, si queremos calcular $P(a < X < b)$ y X es de una normal N(μ, σ) entoces Z seguirá una normal N$(0,1)$

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Cuando una distribución binmial $B(n,p)$ cumple $np > 3$ y $nq > 3$, se aproxima a una normal $N(np, \sqrt{npq})$, si son mayores de 5 la aproximación es perfecta.



$$P(Z > a) = 1 - P(Z < a), \quad P(Z < -a) = 1 - P(Z < a)$$

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$$

La corrección por continuidad de Yate seguirá las siguientes reglas:
$P(x = a) = P(a - 0,5 \leq X \leq a + 0,5)$
$P(X \leq a) = P(X \leq a + 0,5)$
$P(X < a) = P(X \leq a - 0,5)$
$P(X > a) = P(X \geq a + 0,5)$
$P(X \geq a) = P(X \geq a - 0,5)$
Cálculo de $z_{\alpha/2}$ con un **Nivel de confianza** del 95 %: $NC = 0,95 = 1 - \alpha$ ($\alpha =$**Nivel de significación**)$\Longrightarrow$ $\alpha = 0,05$. Para una distribución bilateral tendremos $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025 \Longrightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$ se busca en la tabla $N(0,1)$ y obtenemos $z_{\alpha/2} = 1,96$
Para muestras aleatorias de tamaño n con media $\overline{X}$ de una $N(\mu, \sigma)$ la media $\overline{X}$ se distribuye como una normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Error: $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\overline{X}-E,\overline{X}+E)=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de medias.

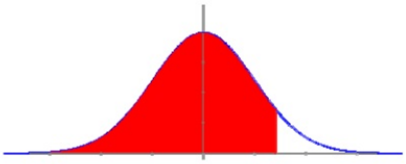
Proporciones: Sea $\hat{p}$ proporción de la muestra de tamaño n, se distribuye como una $N\left(p,\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$

Error: $E=z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

Intervalo de Confianza: $(\hat{p}-E,\hat{p}+E)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ zona de aceptación de hipótesis de igualdad de proporciones.

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$P(Z \le z) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Agradecimientos

- ✎ A las Universidades por la publicación de los exámenes oficiales.
- ✎ A Íñigo Zunzunegui Monterrubio (https://aprendeconmigomelon.com) por sus correcciones.
- ✎ A Juan Antonio Martínez (https://www.ebaumatematicas.com) por el contenido de su página, me ha servido para contrastar resultados.
- ✎ A Paula Cabildo por el diseño de la portada y contraportada.

Prof: **Isaac Musat Hervás**

Profesor de Matemáticas en el colegio Villaeuropa de Móstoles

Bachillerato y Selectividad en las dos opciones

Ferroviario en la Dirección de Cercanías de Madrid

Diferentes estudios y trabajos

Jubilado en la actualidad

La educación ha sido mi pasión, el recuerdo del aula, el olor a tiza
y el pantalón manchado de polvo blanco lo llevo siempre conmigo.
Las voces con las preguntas de mis alumnos y mis respuestas,
acertadas o no, quedan en nuestros recuerdos valiosos.
He sido un afortunado, mi trabajo ha sido mi diversión favorita.