Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN
Diciembre 2024

Problema 1 Calcule el límite $\lim_{x\to -\pi} \dfrac{\arctan(x+\pi)}{\sin x}$

Solución:
$$\lim_{x\to -\pi} \frac{\arctan(x+\pi)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos x} = -1$$

Problema 2 Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2-3x+5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$.
Solución:

$$F(x) = \int (x^2-3x+5)e^x\,dx =$$
$$\left[\begin{array}{c} u = (x^2-3x+5) \Longrightarrow du = (2x-3)dx \\ dv = e^x\,dx \Longrightarrow v = e^x \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] = e^x(x^2-3x+5) - \int (2x-3)e^x\,dx =$$
$$\left[\begin{array}{c} u = 2x-3 \Longrightarrow du = 2dx \\ dv = e^x\,dx \Longrightarrow v = e^x \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] = e^x(x^2-3x+5) - \left[(2x-3)e^x - 2\int e^x\,dx\right] =$$
$e^x(x^2-3x+5) - [(2x-3)e^x - 2e^x] + C = e^x(x^2-3x+5) - (2x-3)e^x + 2e^x + C = \boxed{e^x(x^2-5x+10)+C}$
$F(0) = 5 \Longrightarrow 10 + C = 5 \Longrightarrow C = -5 \Longrightarrow \boxed{F(x) = e^x(x^2-5x+10)-5}$.

Problema 3 Calcula justificadamente el siguiente límite:
$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right]$$

Solución:
$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right] = [\infty - \infty]$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2+5} - (x+2)][\sqrt{x^2+5} + (x+2)]}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)} =$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2$$

Problema 4 Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2+3}$

b) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x\sin x}{3\cos x - 3}$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^2+3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$

b) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x\sin x}{3\cos x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x + x\cos x}{-3\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{-3\cos x} = -\frac{2}{3}$

Problema 5 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x\sin x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\, e^{\sin x} - e^x}{2x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x} - e^x}{2} = 0$