Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-4}{1-x}$

a) (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

b) (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntotas:

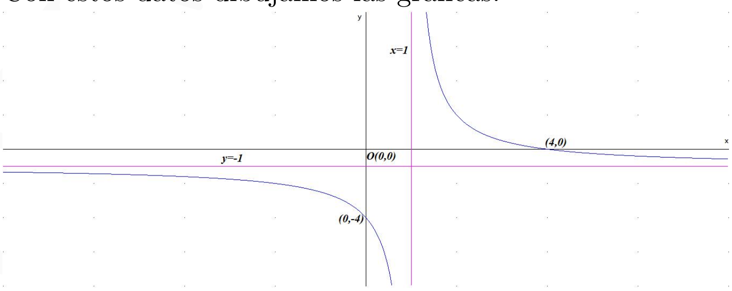
- ☛ Verticales: $x = 1$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-4}{1-x} = \left[\dfrac{-3}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-4}{1-x} = \left[\dfrac{-3}{0^-}\right] = +\infty$
- ☛ Horizontales: $y = -1$
$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-4}{1-x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-4}{1-x} = -1$
- ☛ Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos relativos. Como $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
$f''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava $\smile$ en el $(1, \infty)$

c) Con estos datos dibujamos las gráficas:



Problema 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

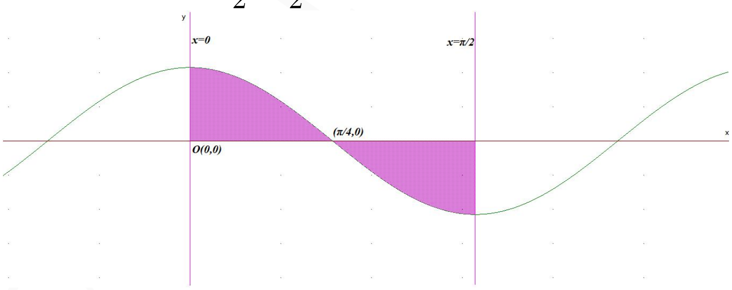
a) (1,25 punto) Calcula una primitiva que pase por el punto $(0, 1)$.

b) (1,25 punto) Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

a) $F(x) = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx = \left[\begin{array}{c} t = \frac{\pi}{2} - 2x \\ dt = -2dx \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{array}\right] = \int \sin t \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \sin t \, dt =$
$\frac{\cos t}{2} + C = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + C$
$F(0) = 0 + C = 1 \Longrightarrow C = 1 \Longrightarrow F(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} + 1$

b) Comprobamos si hay algún punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:
$f(x) = 0 \Longrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow$ la función corta al eje OX en un punto interior del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que tendremos dos recintos de integración con sus áreas correspondientes: $S_1 : \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ y $S_2 : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.
El área total será $S = |S_1| + |S_2|$
$S_1 = \int_0^{\pi/4} f(x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}$
$S_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$
$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ u^2$



Problema 3 (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x}$.

a) (1 punto) Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

b) (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$.
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-4}{1-x} = \left[\dfrac{-3}{0^+}\right] = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4}{1-x} = \left[\dfrac{-3}{0^-}\right] = +\infty$
- Horizontales: No hay.
$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-4}{1-x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4}{1-x} = -\infty$
- Oblícuas: $y = mx + n$
$m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4}{x-x^2} = -1$
$n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2-4}{1-x} + x\right) = -1$

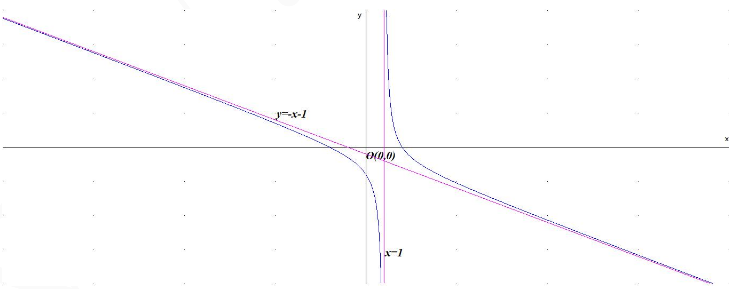
$$y = -x - 1$$

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio de la función y, por tanto, no tiene extremos relativos.
$f''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3} \neq 0 \Longrightarrow f$ no tiene puntos de inflexión:

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función es convexa $\frown$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava $\smile$ en el $(1, \infty)$.

c) Gráfica:



Problema 4 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sin(\pi - 2x)$.

a) (1,25 puntos) Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

b) (1,25 puntos) Calcula el área limitada por f, las rectas $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int \sin(\pi - 2x)\,dx = \begin{bmatrix} t = \pi - 2x \\ dt = -2dx \\ dx = \dfrac{dt}{-2} \end{bmatrix} = \int \sin t\,\dfrac{dt}{-2} = -\dfrac{1}{2}\int \sin t\,dt =$

$\dfrac{\cos t}{2} + C = \dfrac{\cos(\pi - 2x)}{2} + C$

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + C = 1 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow F(x) = \dfrac{\cos(\pi - 2x) + 1}{2}$

b) Analizamos posibles puntos de corte de la función con el eje de abscisas en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ y tenemos $\sin(\pi - 2x) = 0 \Longrightarrow \pi - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ luego hay dos recintos de integración: $S_1 : \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right]$ y $S_2 : \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

$S_1 = \displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sin(\pi - 2x)\,dx = F(0) - F\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$S_2 = \displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin(\pi - 2x)\,dx = F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - F(0) = \dfrac{1}{2}$

$S = |S_1| + |S_2| = 1\ u^2$