Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 - b\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a y b.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcula el valor de b para que, en el punto con $x = \dfrac{\pi}{2}$, la función tenga tangente $y = \dfrac{\pi}{2}x$.

Solución:

a) Las dos ramas son continuas como composición de funciones continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(a - \cos x) = a - 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 - b\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -b \\ f(0) = a - 1 \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)} a-1 = -b$$

$$b = 1 - a$$

La función es continua en $\mathbb{R}$ si se cumple que $b = 1-a$, en caso contrario la función sería continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Se trata de la segunda rama: $f(x) = x^2 - b\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f'(x) = 2x - b\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi + b = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow b = -\dfrac{\pi}{2}$

Problema 2 (2,5 puntos) Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{\sin 2x^2 + \cos^2 x + \log(x+5)}}$$

Solución:

Para que el límite exista se tiene que cumplir: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)$

En ambos casos: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{2}{3}$ luego el límite existe y es precisamente ese valor. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{\sin 2x^2 + \cos^2 x + \log(x+5)}} = \dfrac{2}{3}$

En $x = 2$ la función es continua, el denominador no se anula en ese punto.

Problema 3 (2,5 puntos) Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones $f(x) = g(x)$:

$$\begin{cases} -2x = x + 6 \Longrightarrow x = -2 \Longrightarrow (-2, 4) & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 = x + 6 \Longrightarrow x = 3,\ x = -2\,\text{no válida} \Longrightarrow (3, 9) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos dos recintos de integración $S_1 : [-2, 0]$ y $S_2 : [0, 3]$.

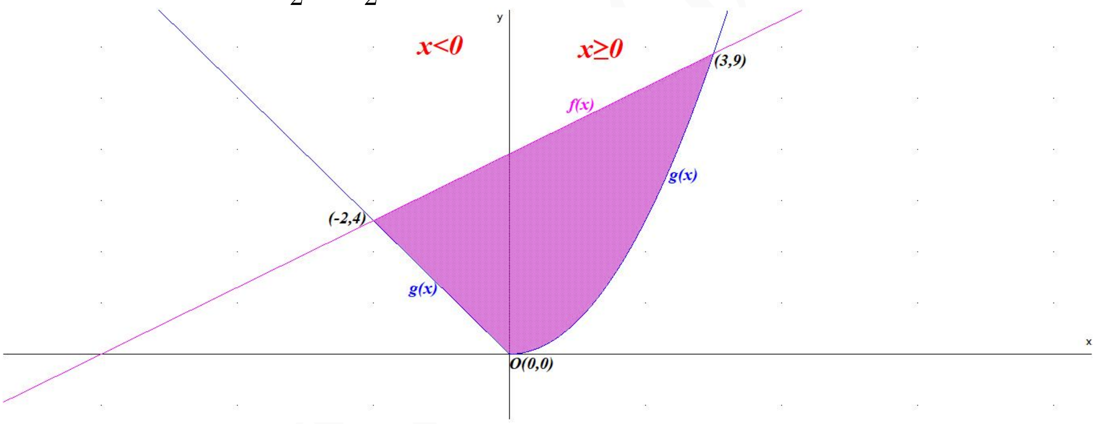
$S_1 = \displaystyle\int_{-2}^{0} (x + 6 + 2x)\, dx = \int_{-2}^{0} (3x + 6)\, dx = \left.\frac{3x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{0} = 6$

S_1 es positiva por estar f por encima de g en $[-2, 0]$

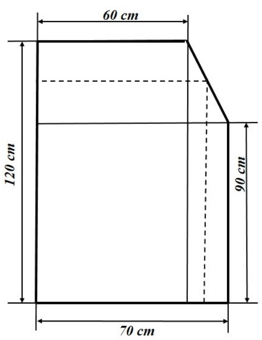
$S_2 = \displaystyle\int_{0}^{3} (x + 6 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{0} (-x^2 + x + 6)\, dx = \left.-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{0}^{3} = \frac{27}{2}$

S_2 es positiva por estar f por encima de g en $[0, 3]$

$S = |S_1| + |S_2| = 6 + \dfrac{27}{2} = \dfrac{39}{2} = 19,5\ u^2$



Problema 4 (2,5 puntos)



En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?

Solución:

Tenemos: $\dfrac{x}{10} = \dfrac{30-y}{30} \Longrightarrow y = 30 - 3x$
$S(x, y) = (60 + x)(90 + y) \Longrightarrow$
$S(x) = (60 + x)(120 - 3x) = -3x^2 - 60x + 7200$
$S'(x) = -6x - 60 = 0 \Longrightarrow x = -10$
La función $S(x)$ es decreciente en el intervalo $[0, 10]$ siendo su valor máximo cuando $x = 0 \Longrightarrow S(x) = 7200$
En conclusión:
Hay que cortar un cristal de $60 + 0 = 60$ cm de ancho y $90 + 30 - 3 \cdot 0 = 120$ cm de alto con un área máxima de 7200 cm^2