Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$ calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

Solución:

a) f es continua en las dos ramas para $x \neq 0$, hay que estudiar la continuidad en $x = 0$:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}}{1} = 2 = a \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$ cuando $a = 2$. Si $a \neq 2 \Longrightarrow$ la función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x)$ no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)+1}{x^2} \ \forall x \neq 0$
$f(1) = e^2 - 1$ y $m = f'(1) = e^2 + 1 \xrightarrow{y - f(1) = f'(1)(x-1)} y - e^2 + 1 = (e^2+1)(x-1) \Longrightarrow$

$$\text{recta tangente}: \ y = (e^2+1)x - 2$$

Puntos de corte:

- Con OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -2)$
- Con OX: hacemos $y = 0 \Longrightarrow (e^2+1)x - 2 = 0 \Longrightarrow \left(\dfrac{2}{e^2+1}, 0\right)$

Problema 2 (2,5 puntos) Calcula justificadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right]$$

Solución:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right] = [\infty - \infty]$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[\sqrt{x^2+5} - (x+2)][\sqrt{x^2+5} + (x+2)]}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5} + (x+2)} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-4x}{2x} = -2$

Problema 3 (2,5 puntos)

a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = ax + b\sin x \cos x + c$$

sea una primitiva de $g(x) = \sin^2 x$.
(*Nota: recuerda que* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

b) (0,8 puntos) Sabiendo que $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ demuestra que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Solución:

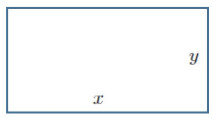
a) $f'(x) = a + b(\cos^2 x - \sin^2 x) = a + b(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = a + b(1 - 2\sin^2 x) = a + b - 2b\sin^2 x$
$g(x) = \sin^2 x = a + b - 2b\sin^2 x \Longrightarrow a = -b = \dfrac{1}{2}$ y $b = -\dfrac{1}{2}$. c puede ser cualquier valor real.

b) Sea $h(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x \Longrightarrow h'(x) = 2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Longrightarrow$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Problema 4 (2,5 puntos) Demuestra que, entre todos los rectángulos de perímetro P cm, el de mayor área es el cuadrado.

Solución:



$P = 2x + 2y \Longrightarrow y = \dfrac{P - 2x}{2}$

$S(x, y) = xy \Longrightarrow S(x) = \dfrac{Px - 2x^2}{2}$

$S'(x) = \dfrac{P - 4x}{2} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{P}{4}$

$S''(x) = -2 \Longrightarrow S''\left(\dfrac{P}{4}\right) = -2 < 0 \Longrightarrow x = \dfrac{P}{4}$ es un máximo relativo.

Si $x = \dfrac{P}{4} \Longrightarrow y = \dfrac{P - \frac{P}{2}}{2} = \dfrac{P}{4} \Longrightarrow x = y = \dfrac{P}{4} \Longrightarrow$ el rectángulo de mayor área es un cuadrado.