Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b\cos x + c\sin x$$

Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

$f(x) = a + b\cos x + c\sin x \Longrightarrow f'(x) = -b\sin x + c\cos x$

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \Longrightarrow a + c = 1 \\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Longrightarrow -b = 0 \\ f(0) = -1 \Longrightarrow a + b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = -1 + 2\sin x$$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

a) (1,5 puntos) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

b) (1 punto) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a) $f'(x) = -e^{-x^2}(x - 1)(2x + 1) = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -\dfrac{1}{2}$

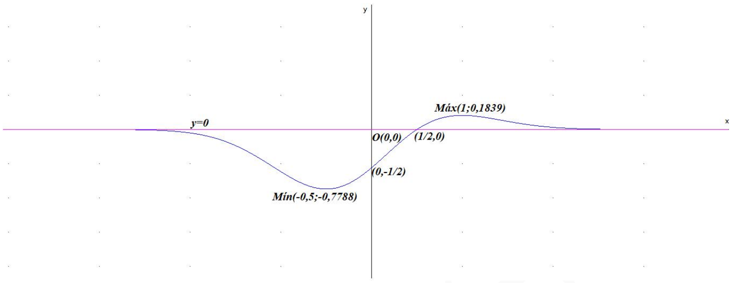
	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ y decreciente en el $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$ con un máximo relativo en $\left(1, \dfrac{1}{2e}\right) \simeq (1; 0,1839)$ y un mínimo relativo en $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{e^{1/4}}\right) \simeq (-0,5; -0,7788)$

b) Los extremos hallados en el apartado anterior son también absolutos. La función no toma valores por encima del máximo $\left(1, \dfrac{1}{2e}\right)$ a partir del cual decrece buscando la asíntota horizontal $y = 0$. Por otra parte la función decrece $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ desde la asíntota $y = 0$ hasta el mínimo donde empieza a crecer.
Compruebo que $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{4xe^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{2e^{x^2}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{4xe^{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$$



Problema 3 (2,5 puntos) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) (1 punto) Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) (1,5 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

a) ☛ $f(x) = -x^2 + 7$ es una función PAR, corta con el eje de ordenadas en $(0, 7)$ y con el eje de abscisas en los puntos $f(x) = -x^2 + 7 = 0 \Longrightarrow (\pm\sqrt{7}, 0)$.
$f'(x) = -2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $f''(x) = -2 \Longrightarrow f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow (0, 7)$ es un máximo relativo.

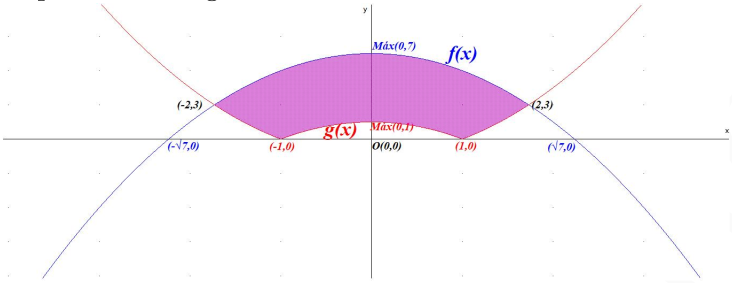
☛ $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ es una función PAR y continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, que corta al eje de ordenadas en el $(0, 1)$, siendo dicho punto un máximo relativo.

☛ $f(x) = g(x) \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = -x^2 + 7 \Longrightarrow 2x^2 = 8 \Longrightarrow x = -2, \ x = 2 \text{ no válida} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -x^2 + 1 = -x^2 + 7 \Longrightarrow 1 \neq 7 & \text{si} \quad -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 = -x^2 + 7 \Longrightarrow 2x^2 = 8 \Longrightarrow x = 2, \ x = -2 \text{ no válida} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte de las dos gráficas serán: $(-2,3)$ y $(2,3)$ y el recinto de integración será $[-2,2]$ separando las ramas de la función g.

☛ Representación gráfica:



b) Tenemos los recintos $S_1 : [-2,-1]$, $S_2 : [-1,1]$ y $S_3 : [1,2]$. Como $f(x)$ está por encima de $g(x)$ en los tres recintos y hacemos $f(x)-g(x)$. Las tres integrales serán positivas.

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (f(x)-g(x))\,dx = \int_{-2}^{-1} (-x^2+7-x^2+1)\,dx = \int_{-2}^{-1} (-2x^2+8)\,dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x\Big]_{-2}^{-1} =$$

$$S_2 = \int_{-1}^{1} (f(x)-g(x))\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2+7+x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1} 6\,dx = 6x]_{-1}^{1} = 12$$

$$S_3 = S_1 = \frac{10}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = \frac{10}{3} + 12 + \frac{10}{3} = \frac{56}{3} \simeq 18,6667\ u^2$$

Problema 4 (2,5 puntos) Halla $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$.

Solución:

$$F(x) = \int e^x \cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \cos x \Longrightarrow du = -\sin x\,dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array}\right] = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x\,dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array}\right] = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx \Longrightarrow$$

$$F(x) = e^x(\cos x - \sin x) - F(x) \Longrightarrow 2F(x) = e^x(\cos x - \sin x) \Longrightarrow F(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\pi/2}-1}{2} \simeq 1,905$$