Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Sea la función definida por $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$. Sabiendo que su gráfica tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(0, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x$, calcula la asíntota oblicua y los valores de a y b.

Solución:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x^3 - x} \overset{a\neq 0}{=} a = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 + bx^2 + x - 1}{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{bx^2 + 3x - 1}{x^2 - 1} \overset{b\neq 0}{=} b$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + b$ que pasa por $(0, 1) \Longrightarrow 1 = 0 + b \Longrightarrow b = 1 \Longrightarrow y = 2x + 1$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan(x + \pi)$, donde arctan denota la función arcotangente.

a) (1,5 puntos) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de f. Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) (1 punto) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x}$

Solución:

a) $f(x) = \arctan(x + \pi) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + (x + \pi)^2} \Longrightarrow f''(x) = \dfrac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2}$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow -2(x + \pi) = 0 \Longrightarrow x = -\pi$

	$(-\infty, -\pi)$	$(-\pi, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es cóncava $\smile$ en el intervalo $(-\infty, -\pi)$ y convexa en el intervalo $(-\pi, \infty)$. Presenta un punto de inflexión en $x = -\pi \Longrightarrow (-\pi, f(-\pi)) = (-\pi, 0)$.
Nota: "Cóncava según la RAE de una curva o de una superficie: Que se asemeja al interior de una circunferencia o una esfera", "Curvado hacia dentro, como el interior de un cuenco".

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos x} = -1$

www.musat.net

Problema 3 (2,5 puntos) Halla la función $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3,-4\ln 5)$ que verifica $f'(x)=\dfrac{3x^2+4x+12}{x^2-4}$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.

Solución:

$$F(x)=\int\frac{3x^2+4x+12}{x^2-4}\,dx=\left[\begin{array}{l}\big(\quad 3x^2+4x+12\big):\big(x^2-4\big)=3+\dfrac{4x+24}{x^2-4}\\ \underline{\;-3x^2\qquad\quad +12\;}\\ \qquad\qquad 4x+24\end{array}\right]=$$

$$\int\left(3+\frac{4x+24}{x^2-4}\right)dx=\left[\begin{array}{c}x^2-4=0\Longrightarrow x=\pm 2\\ \dfrac{4x+24}{x^2-4}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}\\ 4x+24=A(x+2)+B(x-2)\\ x=-2\Longrightarrow 16=-4B\Longrightarrow B=-4\\ x=2\Longrightarrow 32=4A\Longrightarrow A=8\\ \dfrac{4x+24}{x^2-4}=\dfrac{8}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}\end{array}\right]=$$

$$3x+\int\left(\frac{8}{x-2}-\frac{4}{x+2}\right)dx=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|+C$$

Tenemos: $F(3)=-4\ln 5\Longrightarrow 9+0-4\ln 5+C=-4\ln 5\Longrightarrow C=-9\Longrightarrow$

$$F(x)=3x+8\ln|x-2|-4\ln|x+2|-9$$

Problema 4 (2,5 puntos) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x^2-3x+5)e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$.

Solución:

$$F(x)=\int(x^2-3x+5)e^x\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{c}u=(x^2-3x+5)\Longrightarrow du=(2x-3)dx\\ dv=e^x\,dx\Longrightarrow v=e^x\\ \displaystyle\int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=e^x(x^2-3x+5)-\int(2x-3)e^x\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{c}u=2x-3\Longrightarrow du=2dx\\ dv=e^x\,dx\Longrightarrow v=e^x\\ \displaystyle\int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=e^x(x^2-3x+5)-\left[(2x-3)e^x-2\int e^x\,dx\right]=$$

$e^x(x^2-3x+5)-[(2x-3)e^x-2e^x]+C=e^x(x^2-3x+5)-(2x-3)e^x+2e^x+C=\boxed{e^x(x^2-5x+10)+C}$

$F(0)=5\Longrightarrow 10+C=5\Longrightarrow C=-5\Longrightarrow\boxed{F(x)=e^x(x^2-5x+10)-5}$.