Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ tenemos:

$AB = I - CB \Longrightarrow AB + CB = I \Longrightarrow (A + C)B = I \Longrightarrow$

$\exists\, B^{-1} = A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

a) (1,5 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para el valor $m = 2$.

Solución:

a) $|A| = 2m^2 - 6m + 4 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 2$.

- ☛ Si $m \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- ☛ Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$
- ☛ Si $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

b) $A\cdot X = B \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 12 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

sistema compatible indeterminado

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 (2,5 puntos) En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1 g de M_1	10	10	20
para 1 g de M_2	10	20	30
para 1 g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Solución:

Sean x los gramos del medicamento M_1, y los gramos del medicamento M_2 y z los gramos del medicamento M_3.

$$\left\{ \begin{array}{r} 10x + 10y + 20z = 70000 \\ 10x + 20y + 30z = 90000 \\ 20x + 30y + 50z = 160000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + y + 2z = 7000 \\ x + 2y + 3z = 9000 \\ 2x + 3y + 5z = 16000 \end{array} \right.$$

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 1 & 2 & 3 & 9000 \\ 2 & 3 & 5 & 16000 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 7000 \\ y + z = 2000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5000 - \lambda \\ y = 2000 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Dando valores a λ se pueden encontrar multiples soluciones, siendo válidas solo las enteras positivas. Por ejemplo con $\lambda = 0$ tenemos $x = 5000$ gramos de medicamento M_1, $y = 2000$ gramos de medicamento M_2 y $z = 0$ gramos de medicamento M_3.

Problema 4 (2,5 puntos) Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

a) (1,25 puntos) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$.

b) (1,25 puntos) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$

Solución:

a) $|M| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 2$.
Si $a \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$
Si $a = 1 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$
Si $a = 2 \Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$

b) Si $a = 0 \Longrightarrow |M| = -2$,
$|2PM| = |M^3| \Longrightarrow 2^3|P||M| = |M|^3 \Longrightarrow -16|P| = -8 \Longrightarrow |P| = \dfrac{1}{2}$