Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A^T \cdot B + I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A, e I_2 es la matriz identidad de orden 2.

a) (1 punto) Calcula C^{2n}, con $n \in \mathbb{N}$

b) (1,5 punto) Resuelve la ecuación $CX = 5(A^T \cdot B)$.

Solución:

$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) $C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C^4 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix}$, $C^6 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}, \dots, C^{2n} = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$

b) $CX = 5(A^T \cdot B) \Longrightarrow X = 5C^{-1}(A^T \cdot B) = 5 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$

$5 \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) (1,5 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

b) (1 punto) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $A \cdot X = O$ cuando $m = 6$.

Solución:

a) $|A| = 0 \; \forall m \in \mathbb{R}$ y $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 6 & m-6 \end{vmatrix} = -3(m+2) = 0 \Longrightarrow m = -2$ Luego si $m \neq -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$ y si $m = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1.$

b) Un sistema homogéneo es siempre compatible, por el apartado anterior será compatible indeterminado y podemos eliminar una de las ecuaciones, en nuestro caso la tercera para $m = 6$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + 4z = 0 \\ -4x + 6y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 3 (2,5 puntos) Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483€. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954€. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Solución:

Sean x el precio sin IVA del artículo A, y del B y z del C.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 483 \\ 100 \cdot 0,04x + 10 \cdot 0,1y + 100 \cdot 0,21z = 1954 \\ z = 4x + 8y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 483 \\ 4x + y + 21z = 1954 \\ 4x + 8y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \text{ €} \\ y = 10 \text{ €} \\ z = 92 \text{ €} \end{array} \right.$$

Los precios con IVA serían:

- El de A: $3 \cdot 1,04 = 3,12$ €
- El de B: $10 \cdot 1,1 = 11$ €
- El de C: $92 \cdot 1,21 = 111,32$ €

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 4 & 1 & 21 & 1954 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 0 & -7 & 1 & 22 \\ 0 & 0 & -21 & -1932 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -21z = -1932 \Longrightarrow z = 92 \\ -7y + 92 = 22 \Longrightarrow y = 10 \\ x + 20 + 460 = 483 \Longrightarrow x = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 10 \\ z = 92 \end{array} \right.$$

Problema 4 (2,5 puntos) Considere la ecuación $AX = B$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

a) (0,25 puntos) Calcule el determinante de A.

b) (1 punto) Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.

c) (0,25 puntos) Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.

d) (1 punto) Calcule el valor de X.

Solución:

a) $|A| = -1$

b) $|A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{m\times n}{X} = \underset{3\times 2}{B}$, para que la ecuación tenga sentido tiene que ser $m = 3$ y $n = 2 \Longrightarrow \text{Dim}(X) = 3 \times 2$.

d) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$