Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Determina los valores de m para los que la matriz A^2 tiene inversa.

b) (1,75 puntos) Para $m = 0$ calcula, si es posible, la matriz X que verifica $A^2X = \dfrac{1}{2}(A + B)$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2m & 1 & m \\ 3-m & -3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|A^2| = m^2 - 2m + 1 = 0 \Longrightarrow m = 1 \Longrightarrow \exists (A^2)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Si $m = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$A^2X = \dfrac{1}{2}(A+B) \Longrightarrow X = \dfrac{1}{2}(A^2)^{-1}(A+B) =$

$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix}\right] =$

$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 5 & 11 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -13/2 & -77/2 \\ 0 & 5/2 & 2 \\ 19/2 & 13/2 & 53/2 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Determina un numero natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por la de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.

Solución:

Sea x la cifra de las centenas, y de las decenas y z de las unidades. El número sería xyz que correspondería a $100x + 10y + z$.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 198 \\ 100x + 10y + z + (100z + 10y + x) = 828 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - z = 2 \\ 101x + 20y + 101z = 828 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

El número es 513.

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 101 & 20 & 101 & 828\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-101F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & -81 & 0 & -81\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -81y=-81\Longrightarrow y=1\\ -1-2z=-7\Longrightarrow z=3\\ x+1+3=9\Longrightarrow x=5\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=5\\ y=1\\ z=3\end{array}\right.$$

Problema 3 (2,5 puntos) Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

a) (0,75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modele el problema y escríbelo matricialmente.

b) (1 punto) Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

c) (0,75 puntos) Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar 10 piezas?

Solución:
Sean x el número de tazas producidas, y de platos y z de teteras.

a) $$\left\{\begin{array}{l} 5x+4y+8z=50\\ 3x+4y+3z=26\end{array}\right.\Longrightarrow\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50\\ 26\end{pmatrix}$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=8\\ 5x+4y+8z=50\\ 3x+4y+3z=26\end{array}\right.\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8\\ 5 & 4 & 8 & 50\\ 3 & 4 & 3 & 26\end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-5F_1\\ F_3-3F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & -1 & 3 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8\\ 0 & -1 & 3 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 12\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} 3z=12\Longrightarrow z=4\\ -y+12=10\Longrightarrow y=2\\ x+2+4=8\Longrightarrow x=2\end{array}\right.$$

Se han fabricado 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

c) Ahora tenemos;

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=10\\ 5x+4y+5z=50\\ 3x+4y+3z=26\end{array}\right.\Longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 5 & 4 & 5 & 50\\ 3 & 4 & 3 & 26\end{array}\right)=\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2-5F_1\\ F_3-3F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -4\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{l} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right)\Longrightarrow \text{sistema incompatible (no tiene solución)}$$

No sería posible fabricar las 10 piezas.

Problema 4 (2,5 puntos) Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) (0,75 puntos) Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de su matriz resultante si pudiese realizarse?

b) (1,75 puntos) Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Solución:

a) $\underset{3\times1}{C} \cdot \underset{3\times3}{A} \cdot \underset{1\times3}{B}$ no se puede multiplicar, el número de columnas de C no coincide con el número de filas de A, y el número de columnas de A no coincide con el número de filas de B.
$\underset{1\times3}{B} \cdot \underset{3\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{C} = \underset{1\times1}{BAC}$ si se puede multiplicar, el número de columnas de B coincide con el número de filas de A, y el número de columnas de A coincide con el número de filas de C. En este caso la matriz resultante tendría de dimensión el número de filas de B por el número de columnas de C, es decir 1×1.

b) $|A| = 2x + 12 = 0 \Longrightarrow x = -6$.

- Si $x \in \mathbb{R} - \{-6\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
- Si $x = -6 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Si $x = 0 \Longrightarrow |A| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$