Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Octubre 2024

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m & 1 \\ 3 & m & 0 & -1 \\ 9 & m-3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ 3 & m & 0 \\ 9 & m-3 & 3 \end{vmatrix} = 9(m^2+m-2) = 0 \Longrightarrow m = -2, \ m = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & m & -1 \\ 9 & m-3 & -7 \end{vmatrix} = -3(2m^2+3m-5) = 0 \Longrightarrow m = -\frac{5}{2}, \ m = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & -m & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 9(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 1$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 \\ m & 0 & -1 \\ m-3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 6 - 6m^2 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

Problema 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

a)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ -a & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ -a & 3a+b \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -5 \end{array} \right.$$
$$A^2 = 4A - 5I = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = (4A - 5I)A = 4A^2 - 5A = 4(4A - 5I) - 5A = 11A - 20I$
$$A^3 = 11\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 20\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = (11A - 20I)A = 11A^2 - 20A = 11(4A - 5I) - 20A = 24A - 55I$$
$$A^5 = A^4 \cdot A = (24A - 55I)A = 24A^2 - 55A = 24(4A - 5I) - 55A = 41A - 120I$$
$$A^5 = 41\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 120\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -79 & 82 \\ -41 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Solución:
$$\left\{ \begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -4/3 & 5/3 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -4/3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+2d = 2a-b \Longrightarrow a = b-d \\ -c = c \Longrightarrow c = 0 \\ -d = 2c-d \Longrightarrow c = 0 \end{array}\right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Problema 5 Tres camioneros trabajan de forma independiente con mercancía que traen de Almería a Madrid. El camión 1 tiene un gasto de 300€, el camión 2 de 250€ y el camión 3 de 150€ para este recorrido; estas cantidades se deducirán después de pagar el IVA. Los tres camiones cargan en el origen, el camión 1 carga 100 kg de patatas, 150 kg de cebollas y 100 kg de zanahorias, el camión 2 carga 150 kg de patatas, 90 kg de cebollas y 100 kg de zanahorias y el camión 3 carga 200 kg de cebollas y 50 kg de zanahorias.
La mercancía sufre una merma del 1 % en el recorrido por manipulación de transporte y se vende en destino con un beneficio de 180€ el camionero 1, 270€ el camionero 2 y 100€ el camionero 3, después de deducir el 5 % IVA.
Plantear la situación matricialmente y calcular el precio de venta de las mercancías.
Solución:
Tenemos la mercancía:

	Patatas	cebollas	Zanahorias
Camión 1	100	150	100
Camión 2	150	90	100
Camión 3	0	200	50

$$\Longrightarrow M = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 100 \\ 150 & 90 & 100 \\ 0 & 200 & 50 \end{pmatrix}$$

Tenemos los beneficios:

	Beneficios
Camión 1	180
Camión 2	270
Camión 3	100

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}$$

También tenemos unos gastos de transporte:

	Precio de Venta kg
Camión 1	300
Camión 2	250
Camión 3	150

$$\Longrightarrow T = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Como se ha deducido el IVA ahora hay que incluirlo $1,05(B+T)$

El total de la venta es $H = 1,05(B+T) = 1,05\left[\begin{pmatrix}180\\270\\100\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}300\\250\\150\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}504\\546\\262,5\end{pmatrix}$

Sea $V = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ es el precio de venta.

Tenemos la ecuación matricial $0,99 \cdot M \cdot V = H \Longrightarrow V = \dfrac{1}{0,99}M^{-1}H =$

$\dfrac{1}{0,99}\begin{pmatrix}100 & 150 & 100\\150 & 90 & 100\\0 & 200 & 50\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}504\\546\\262,5\end{pmatrix} = \dfrac{1}{0,99}\begin{pmatrix}-0,048 & 0,038 & 0,018\\-0,023 & 0,015 & 0,015\\0,092 & 0,062 & -0,042\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1,83€\\0,82€\\2,04€\end{pmatrix}$

Las patatas se vendieron a 1,83€, las cebollas a 0,82€ y las zanahorias a 2,04€.