

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)
Octubre 2024

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ 2 & -m & 3 \\ 4 & m+2 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
b) Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & -m & 3 \\ 4 & m+2 & 5 \end{vmatrix} = -2(m^2 + m - 2) = 0 \implies m = 1, \quad m = -2$$

$$\text{Si } m = -2 \text{ o } m = 1 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}.$$

$$\text{Si } m \neq -2 \text{ y } m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & -5/2 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $AX + BX = 3I + CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + BX = 3I + CX \implies X = 3(A + B - C)^{-1}$$

$$A + B - C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3(A + B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$X = 3(A + B - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+2 & 2x+2 & 2x+2 & 2x+2 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \\ (2x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x \\ x & 1 & 1 & x \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{bmatrix} = (2x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & x-1 \\ x & 1-x & 1-x & 0 \end{vmatrix} = \\ (2x+2) \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & 0 \\ 0 & x-1 & x-1 \\ 1-x & 1-x & 0 \end{vmatrix} &= (2x+2)(x-1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 1-x & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \\ (2x+2)(x-1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Problema 4 Tres camioneros trabajan de forma independiente con mercancía que traen de Almería a Madrid. El camión 1 tiene un gasto de 300€, el camión 2 de 250€ y el camión 3 de 150€ para este recorrido; estas cantidades se deducirán después de pagar el IVA. Los tres camiones cargan en el origen, el camión 1 carga 100 kg de patatas, 150 kg de cebollas y 100 kg de zanahorias, el camión 2 carga 150 kg de patatas, 90 kg de cebollas y 100 kg de zanahorias y el camión 3 carga 200 kg de cebollas y 50 kg de zanahorias. La mercancía sufre una merma del 1% en el recorrido por manipulación de transporte y se vende en destino a 2€ el kg de patatas, 1€ el kg de cebollas y 1,5€ el kg de zanahorias. A la venta hay que deducir un 5% de IVA.

Plantear la situación matricialmente y calcular los posibles beneficios de estos camioneros.

Solución:

Tenemos la mercancía:

	Patatas	cebollas	Zanahorias
Camión 1	100	150	100
Camión 2	150	90	100
Camión 3	0	200	50

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 100 \\ 150 & 90 & 100 \\ 0 & 200 & 50 \end{pmatrix}$$

Tenemos la venta:

	Precio de Venta kg
Patatas	2
cebollas	1
Zanahorias	1,5

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

También tenemos unos gastos de transporte:

	Precio de Venta kg
Camión 1	300
Camión 2	250
Camión 3	150

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Como hay una merma del 1% tenemos $0,99M$ a la venta:

$$0,99 \cdot M \cdot V = 0,99 \cdot \begin{pmatrix} 100 & 150 & 100 \\ 150 & 90 & 100 \\ 0 & 200 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 495 \\ 534,6 \\ 272,25 \end{pmatrix}$$

Hay que descontar un IVA del 5% y los gastos de transporte, el beneficio es:

$$B = 0,95 \begin{pmatrix} 495 \\ 534,6 \\ 272,25 \end{pmatrix} - T = 0,95 \begin{pmatrix} 495 \\ 534,6 \\ 272,25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170,25 \\ 257,87 \\ 108,6375 \end{pmatrix}$$

Dicho de otra manera en forma de tabla:

	Beneficio
Camión 1	170,25€
Camión 2	257€
Camión 3	108,64€