Examen de Matemáticas CCSSII (Ordinaria-Coincidente 2024)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $A \cdot B$ y $A^3 \cdot B$.

b) Determine el valor del determinante de la matriz $A - 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - 2I| = 0$
ya que la matriz tiene dos filas iguales.

Problema 2 *(2 puntos)* La siguiente derivada de una función real de variable real representa la tasa de variación instantánea de una sustancia disuelta en agua:

$$f'(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{2}t^2\right),$$

siendo $t \geq 0$ el tiempo en horas desde que se prepara la disolución.

a) Encuentre la función que proporciona la cantidad de sustancia disuelta en función del tiempo, sabiendo que en $t = 0$ la cantidad disuelta es nula.

b) Determine el instante de tiempo en el que la sustancia disuelta es máxima.

Solución:

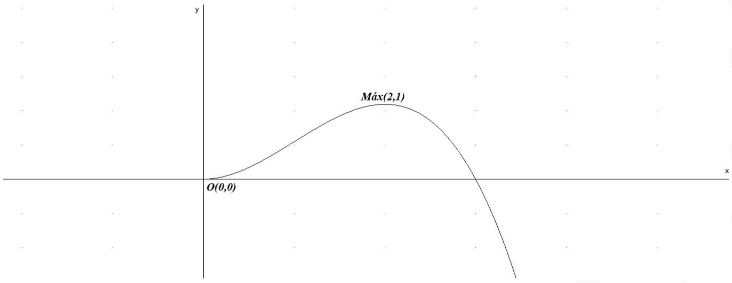
a) $f(t) = \int f'(t)\,dt = \dfrac{3}{2}\int\left(t - \dfrac{1}{2}t^2\right)dt = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6}\right) + C$

Como $f(0) = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow f(t) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{6}\right)$

b) $f'(t) = \dfrac{3}{2}\left(t - \dfrac{1}{2}t^2\right) = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $t = 2$

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(t)$	$+$	$-$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0,2)$, y decreciente en el intervalo $(2,+\infty)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(0,0)$ y un máximo relativo, en nuestro caso absoluto, en el punto $(2,1)$. Luego la máxima cantidad disuelta se presenta a las dos horas.



Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{-x^2}{x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y estudie la continuidad en el punto $x = 1$.

b) Analice los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) La rama $x \le 1$ es una exponencial y $\text{Dom}f = [0,1)$ en esa rama. En la rama $x > 1$ el denominador se anula en $x = 2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (0,2)\cup(2,\infty)$. En conclusión: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

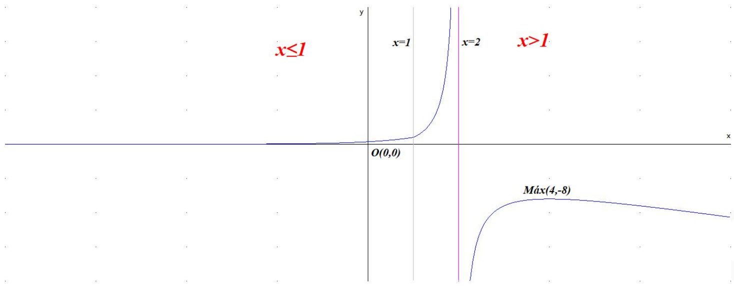
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2}{x-2} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

b) $f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} > 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ -\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ no válida y } x = 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$



Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x^4 - 16}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Asíntotas:

☛ Verticales:

- En $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^5-1}{x^4-16} = \left[\frac{-33}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^5-1}{x^4-16} = \left[\frac{-33}{0^-}\right] = +\infty$$

- En $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^5-1}{x^4-16} = \left[\frac{31}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^5-1}{x^4-16} = \left[\frac{31}{0^+}\right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay.

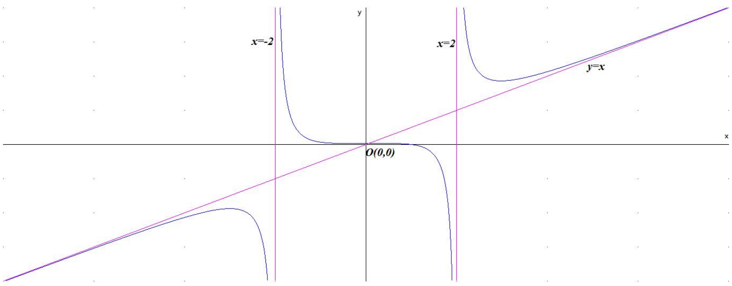
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5-1}{x^4-16} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^5-1}{x^4-16} = +\infty$$

☛ Oblícua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5-1}{x^5-16x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^5-1}{x^4-16} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{16x-1}{x^4-16}\right) = 0$$

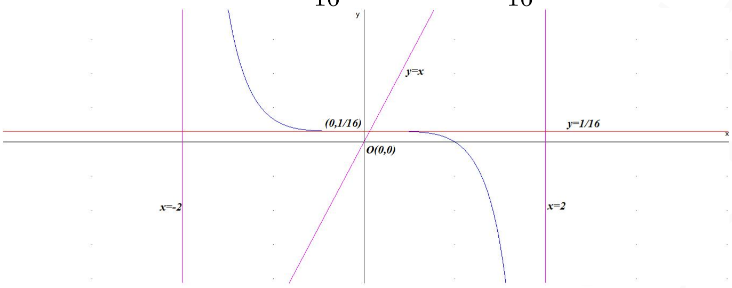
Luego $y = x$



b) $b = f(a) = f(0) = \dfrac{1}{16}$

$f'(x) = \dfrac{x^3(x^5 - 80x + 4)}{(x^4 - 16)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 0$

$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - \dfrac{1}{16} = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{16}$



Problema 5 *(2 puntos)* Se desea vender limonada y naranjada caseras en una verbena popular. Además de agua, de la que disponemos sin limitaciones, cada litro de limonada necesita 4 limones y 80 gramos de azúcar. Cada litro de naranjada necesita 6 naranjas, 1 limón y 50 gramos de azúcar. Se dispone de 80 limones, 72 naranjas y 1720 gramos de azúcar para la elaboración. Cada litro de limonada se venderá a 2 euros y cada litro de naranjada a 2,5 euros. Determine los litros que se deben elaborar de cada una de las dos bebidas para maximizar los ingresos de la venta.

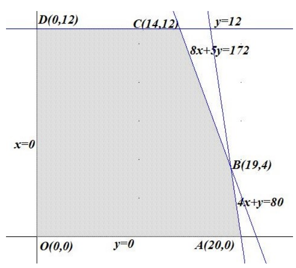
Solución:
Sean x litros de limonada e y litros de naranjada.

	naranjas	limones	azucar	venta
limonada	0	4	80	2€
naranjada	6	1	50	$2,5$€
existencias	≤ 72	≤ 80	≤ 1720	

- La región factible S es:

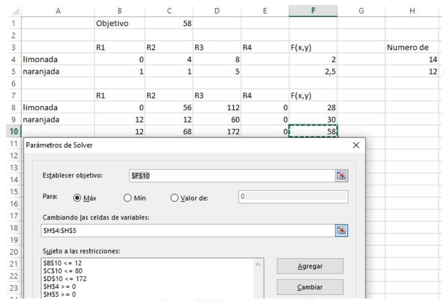
$$\begin{cases} 0x + 6y \leq 72 \\ 4x + y \leq 80 \\ 80x + 50y \leq 1720 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y \leq 12 \\ 4x + y \leq 80 \\ 8x + 5y \leq 172 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(20,0)$, $B(19,4)$, $C(14,12)$ y $D(0,12)$



- La función objetivo es $f(x,y) = 2x + 2,5y \Longrightarrow$

Solución por solver



$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(20,0) = 40 \\ f(19,4) = 48 \\ f(14,12) = 58 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,12) = 30 \end{cases}$$

La máxima venta se obtiene cuando se elaboran 14 litros de limonada y 12 de naranjada, siendo ésta de 58€.

Problema 6 *(2 puntos)* Alba, Benito y Charo son socios de una empresa de reformas. Por un trabajo realizado recibieron 6200 euros que se repartieron en función del tiempo dedicado. La cantidad percibida por Alba excede en 200 euros al total recibido conjuntamente por los otros dos socios. Por otra parte, se sabe que para que Alba y Benito percibieran lo mismo Alba debería entregar a Benito 600 euros. Plantee un sistema de ecuaciones y determine la cantidad percibida por cada socio.

Solución:

Sean x la cantidad percibida por Alba, y la cantidad percibida por Benito y z la cantidad percibida por Charo.

$$\begin{cases} x + y + z = 6200 \\ x - 200 = y + z \\ x - 600 = y + 600 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6200 \\ x - y - z = 200 \\ x - y = 1200 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3200\,€ \\ y = 2000\,€ \\ z = 1000\,€ \end{cases}$$

Alba recibe 3200 €, Benito 2000 € y Charo 1000 €

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 1 & -1 & -1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 1200 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & -2 & -1 & -5000 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6200 \\ 0 & -2 & -2 & -6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1000 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} z = 1000 \\ -2y - 2000 = -6000 \Longrightarrow y = 2000 \\ x + 2000 + 1000 = 6200 \Longrightarrow x = 3200 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3200 \\ y = 2000 \\ z = 1000 \end{cases}$$

Problema 7 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ x + y + z = a \\ -2x + 2ay + 8z = -13 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ -2 & 2a & 8 & -13 \end{array}\right); \quad |A| = 2(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 8 & -13 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 & -13 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & -9 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + 8z = -13 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{7}{2} \\ z = -2 \end{array} \right.$$

Problema 8 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,15$. Además, se sabe que $P(\overline{B}|A) = 0,8$ donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solución:

a) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow$

$0,8 = \dfrac{0,7 - P(A \cap B)}{0,7} \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,14$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,15 - 0,14 = 0,71$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,14 = 0,86$

Problema 9 *(2 puntos)* El tiempo que las películas permanecen en cartelera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 2$ semanas.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple de películas para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de una semana con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 5$ semanas. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ películas el tiempo medio que han permanecido en cartelera, $\overline{X}$, sea mayor de 6 semanas.

Solución:

$$N(\mu; 2)$$

a) $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,25$
$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,25 = 0,75 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\dfrac{2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 15,3664 \Longrightarrow n = 16$

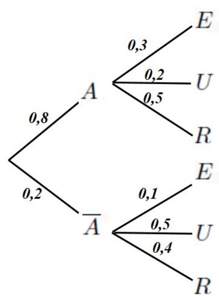
b) $\overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (5; 0,5)$
$P(\overline{X} \geq 6) = P\left(Z \geq \dfrac{6-5}{0,5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

Problema 10 *(2 puntos)* En la base de datos de Spotify el 80 % de las canciones incluidas son de artistas procedentes de EEUU. El 30 % de las canciones de artistas procedentes de EEUU incluidas pueden clasificarse como electrónica, el 20 % como música urbana y el 50 % restante como pertenecientes a otros estilos musicales. Si el artista no procede de EEUU esas probabilidades son de 10 %, 50 % y 40 % respectivamente. Eligiendo al azar una canción de la base de Spotify, calcule la probabilidad de que:

a) La canción pueda clasificarse como música urbana.

b) Sabiendo que la canción puede clasificarse como música urbana, sea de un artista no procedente de EEUU.

Solución:
Sean A artistas EEUU, E música electrónica, U música urbana y R resto de músicas.



a) $P(U) = P(U|A)P(A) + P(U|\overline{A})P(\overline{A}) =$
$0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,26$

b) $P(\overline{A}|U) = \dfrac{P(U|\overline{A})P(\overline{A})}{P(U)} = \dfrac{0,5 \cdot 0,2}{0,26} = 0,3846$