Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Ordinaria 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A.

b) Para $a = -2$ calcule A^{-1}.

Solución:

a) $|A| = -a^3 + a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = -1,\ a = 0$ y $a = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$

b) Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

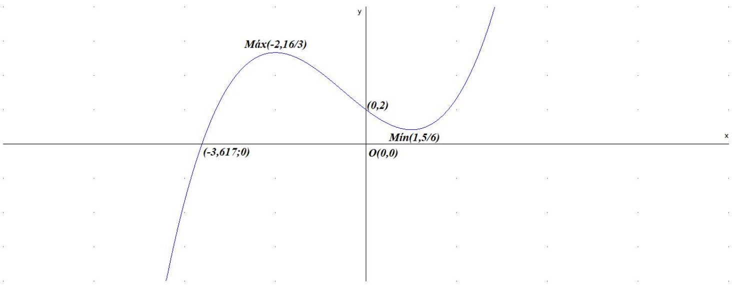
Como $f(0) = 2 \Longrightarrow f(0) = C = 2$

Luego $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$

b) $f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = -2$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en el $(-2, 1)$ con un máximo relativo en el punto de abscisa $x = -2$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$.



Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ae^{2x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

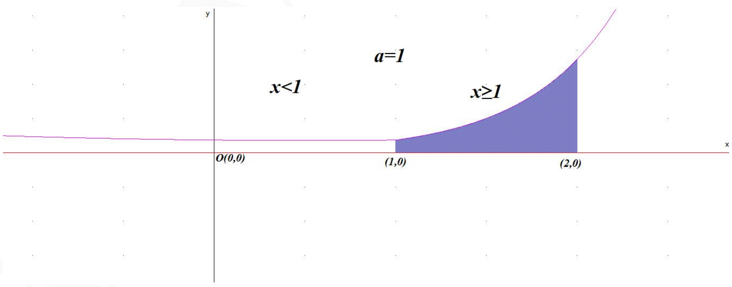
a) La función es continua en las dos ramas por ser composición de funciones polinómicas y exponenciales, hay que imponer la continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - x + e^2) = e^2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ae^{2x}) = ae^2 \\ f(1) = ae^2 \end{array} \right. \xrightarrow{\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1)} e^2 = ae^2 \Longrightarrow a = 1$$

b) Para $a = 1$ y en el intervalo $[1, 2]$ la función $f(x) = e^{2x} > 0$ en toda la rama. Luego el intervalo de integración es $[1, 2]$.

$$F(x) = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$S = \left| \int_1^2 e^{2x}\,dx \right| = |F(2) - F(1)| = \left| \frac{e^4}{2} - \frac{e^2}{2} \right| = \frac{e^4 - e^2}{2} \simeq 23,6045\ u^2$$



Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
  - En $x = -3$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{-5}{0^-}\right] = +\infty$$

  - En $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{x^2-9} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$.

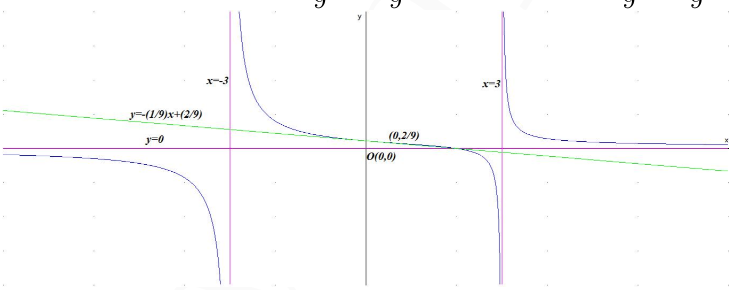
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $b = f(a) = f(0) = \dfrac{2}{9}$

$$f'(x) = -\frac{x^2-4x^2+9}{(x^2-9)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -\frac{1}{9}$$

$$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}(x-0) \Longrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$$



Problema 5 *(2 puntos)* Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

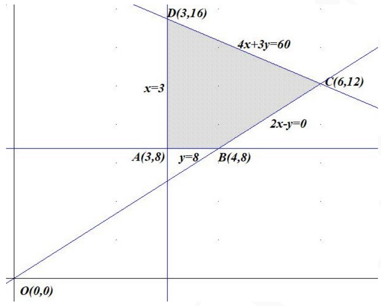
Solución:

Sean x tabletas de 4 gramos e y tabletas de 3 gramos.

- La región factible S es:

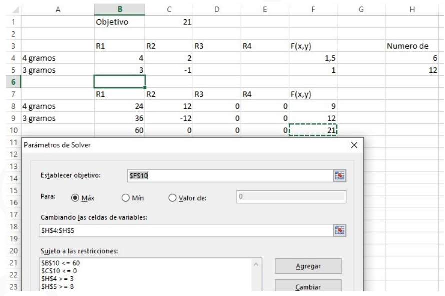
$$\begin{cases} 4x+3y \le 60 \\ x \ge 3 \\ y \ge 8 \\ 2x \le y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+3y \le 60 \\ 2x-y \le 0 \\ x \ge 3 \\ y \ge 8 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán:
$A(3,8)$, $B(4,8)$, $C(6,12)$ y $D(3,16)$



- La función objetivo es $f(x,y) = 1,5x + y \Longrightarrow$

Solución por solver



$$\begin{cases} f(3,8) = 12,5 \\ f(4,8) = 14 \\ f(6,12) = 21 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(3,16) = 20,5 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando se elaboran 6 tabletas de 4 gramos y 12 tabletas de 3 gramos, siendo este beneficio de 21€.

Problema 6 *(2 puntos)* Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución:

Sean x el número de entradas generales, y de estudiantes y z las de infantiles.

$$\begin{cases} x+y+z = 600 \\ 10x+8y+5z = 4900 \\ x = 2z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 600 \\ 10x+8y+5z = 4900 \\ x-2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \\ z = 100 \end{cases}$$

Se venden 200 entradas generales, 300 de estudiantes y 100 infantiles.

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 10 & 8 & 5 & 4900 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 10F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & -2 & -5 & -1100 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & -3 & -600 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} z = 100 \\ -y - 300 = -600 \Longrightarrow y = 300 \\ x + 300 + 100 = 600 \Longrightarrow x = 200 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 300 \\ z = 100 \end{cases}$$

Problema 7 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 2a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 - \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 8 *(2 puntos)* En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno pero no el pop.

Solución:

Sean P le gusta el pop y T le gusta el techno.

$P(P) = \dfrac{90}{200} = \dfrac{9}{20}$, $P(T) = \dfrac{70}{200} = \dfrac{7}{20}$ y $P(P \cap T) = \dfrac{30}{200} = \dfrac{3}{20}$

a) $P(P \cup T) = P(P) + P(T) - P(P \cap T) = \dfrac{9}{20} + \dfrac{7}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$

b) $P(T\cap\overline{P}) = P(T) - P(P\cap T) = \dfrac{7}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{2}{10} = 0,2$

Problema 9 *(2 puntos)* La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

$$N(\mu; 8)$$

a) $n = 25$, $\overline{X} = 120$ y $NC = 0,95$:
$0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,25$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,25 = 0,75 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{8}{\sqrt{25}} = 3,136$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (120 - 3,136; 120 + 3,136) = (116,864; 123,136)$

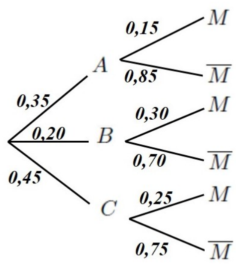
b) $NC = 0,90$:
$0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,10 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$1 = 1,645\dfrac{8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 173,1856 \Longrightarrow n = 174$

Problema 10 *(2 puntos)* En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Solución:
Sean A la piscifactoría A, B la piscifactoría B, C la piscifactoría C, M mide más de 35 mm y $\overline{M}$ no mide más de 35 mm.



a) $P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C) =$
$0,15\cdot 0,35 + 0,30\cdot 0,20 + 0,25\cdot 0,45 = 0,225$

b) $P(C|\overline{M}) = \dfrac{P(\overline{M}|C)P(C)}{P(\overline{M})} = \dfrac{0,45\cdot 0,75}{1-0,225} = 0,4355$