Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2024)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros $a, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica

$$A \cdot B = 6B$$

b) Para $a = 1$ y $c = -1$, calcule $B^t \cdot A \cdot B$, donde B^t denota la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+2 \\ a+c+2 \\ c^2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c+2 = 6 \\ c^2+5 = 6c \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} a = 3 \text{ y } c = 1 \\ a = -1 \text{ y } c = 5 \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - a, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva que pase por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, 1/4)$. Señale la expresión de esta primitiva.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función clasificando, si procede, los extremos relativos de la función.

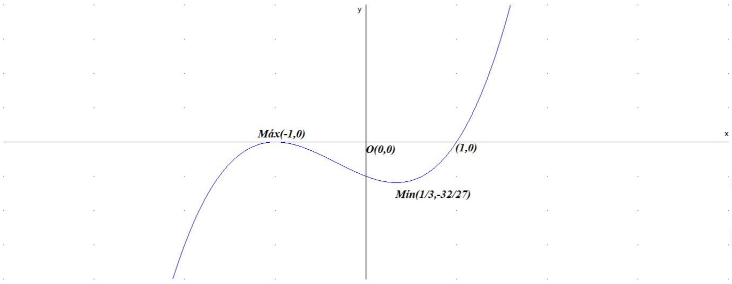
Solución:

a) $F(x) = \int (x^3 + x^2 - x - a)\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - ax + C$
$F(0) = 1 \Longrightarrow C = 1$
$F(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + a + 1 = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{6}$
Luego $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + 1$

b) Si $a = 1$ tenemos $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = \dfrac{1}{3}$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$, y decreciente en el intervalo $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 0)$ y un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{32}{27}\right)$.



Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función $f(x)$ e indique el tipo de discontinuidad si procede.

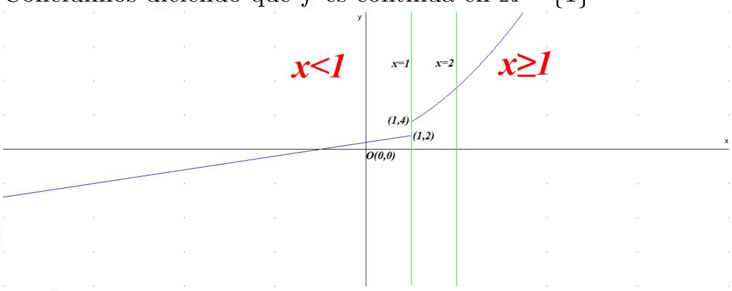
b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

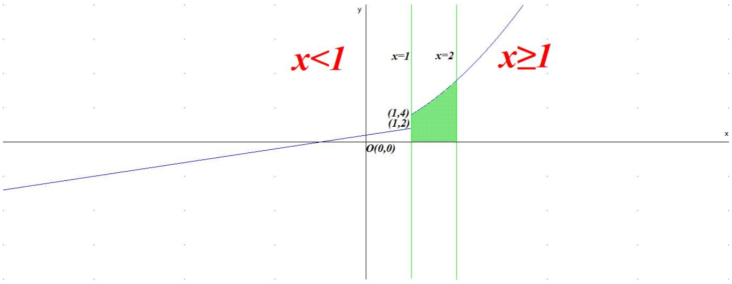
a) La función es continua en todos los puntos de la rama $x < 1$. El denominador se anula en $x = 1$ y no se encuentra en la rama.
La función es continua en todos los puntos de la rama $x > 1$, se trata de un polinomio.
Hay que estudiar la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 1) = 4 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Longrightarrow$$

f es discontinua no evitable en $x = 1$ donde hay un salto finito.
Concluimos diciendo que f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$



b) $f(x) = x^2 + 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$, luego la función no corta al eje de abscisas en el interior del intervalo $(1, 2)$, luego el recinto de integración es el intervalo completo:
$S = \displaystyle\int_1^2 (x^2 + 2x + 1)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_1^2 = \frac{19}{3}\ u^2$



Problema 4 *(2 puntos)* Se considera la siguiente función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4}$$

a) Determine las asíntotas de la función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
  - En $x = -2$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-16}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-16}{0^-}\right] = +\infty$$

  - En $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} = +\infty$$

- Oblícua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} = 1$$

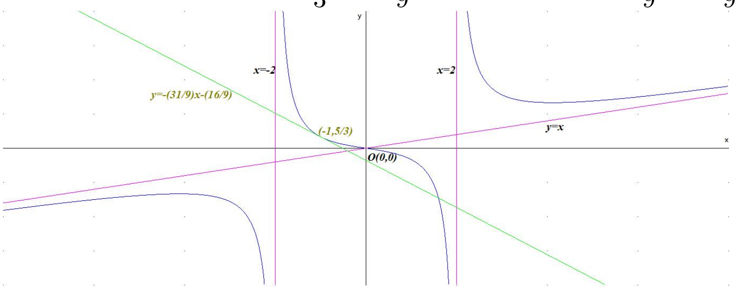
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + 4x}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{8x}{x^2 - 4}\right) = 0$$

Luego $y = x$

b) $b = f(a) = f(-1) = \dfrac{5}{3}$

$f'(x) = \dfrac{x^4 - 16x^2 - 16}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(-1) = -\dfrac{31}{9}$

$y - b = m(x-a) \Longrightarrow y - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{31}{9}(x+1) \Longrightarrow y = -\dfrac{31}{9}x - \dfrac{16}{9}$



Problema 5 *(2 puntos)* Se desea vender batido de chocolate y batido de fresa en una fiesta escolar para recaudar fondos para el viaje de fin de curso. Con la leche de la que se dispone se pueden elaborar 35 litros de batido, y hay cacao en polvo para 30 litros de batido de chocolate como máximo. Se necesitan 15 minutos de preparación por litro de batido de chocolate y 20 minutos por litro de batido de fresa para que tengan la textura correcta. Los batidos tienen que estar listos en 10 horas. Solo hay una batidora y el beneficio que se obtendrá por litro de batido de chocolate es de 10 euros, y por litro de batido de fresa de 11 euros. ¿Cuántos litros de cada tipo de batido se deben producir para maximizar los beneficios? ¿Cuál es el beneficio máximo?

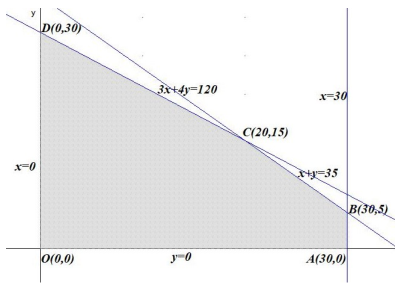
Solución:

Sean x litros de batido de chocolate e y los de fresa.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} x + y \le 35 \\ x \le 30 \\ 15x + 20y \le 600 \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 35 \\ x \le 30 \\ 3x + 4y \le 120 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(30,0)$, $B(30,5)$, $C(20,15)$ y $D(0,30)$

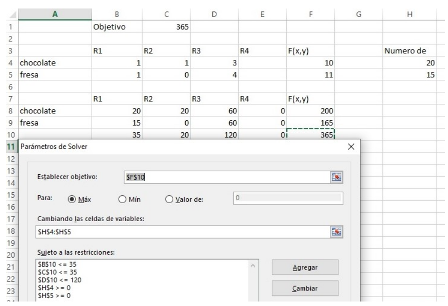


- La función objetivo es $f(x,y) = 10x + 11y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(30,0) = 300 \\ f(30,5) = 355 \\ f(20,15) = 365 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,30) = 330 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando se elaboran 20 litros de batido de chocolate y 15 de fresa, siendo este beneficio de 365€.

Solución por solver



Problema 6 *(2 puntos)* Una caja de Lego contiene un total de 50 piezas de tres tipos diferentes (A, B , C). La cantidad de piezas del tipo A más la del tipo B es igual a cuatro veces la cantidad del tipo C. Si a las piezas del tipo A le sumamos el doble de las piezas del tipo B y cuatro veces las del tipo C, el total de piezas de la caja sería de 100. Plantee un sistema de ecuaciones para saber la cantidad de piezas de cada tipo que contendrá la caja.

Solución:

Sean x el número de piezas de A, y las de B y z las de C.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=50\\ x+y=4z\\ x+2y+4z=100\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=50\\ x+y-4z=0\\ x+2y+4z=100\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=20\\ y=20\\ z=10\end{array}\right.$$

Hay 20 piezas de A, 20 de B y 10 de C.

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50\\ 1 & 1 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 4 & 100\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50\\ 0 & 0 & -5 & -50\\ 0 & 1 & 3 & 50\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -5z=-50\Longrightarrow z=10\\ y+30=50\Longrightarrow y=20\\ x+20+10=50\Longrightarrow x=20\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=20\\ y=20\\ z=10\end{array}\right.$$

Problema 7 *(2 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2x-ay=a\\ a^3x-y=1\end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} a^2 & -a & a\\ a^3 & -1 & 1\end{array}\right);\quad |A|=a^2(a^2-1)=0\Longrightarrow a=0,\ \ a=\pm 1$$

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado}$$

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 8x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Problema 8 *(2 puntos)* Un estudio europeo sobre hábitos de uso de internet indica que el 62 % de los hombres españoles mayores de 16 años participa en redes sociales y que el 81 % lee noticias en internet. Además, el 95 % de los hombres de este estudio participa en redes sociales o lee noticias en internet. Eligiendo un hombre español mayor de 16 años al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Participe en redes sociales y lea noticias en internet.

b) No participe en redes sociales, sabiendo que no lee noticias en internet.

Solución:
Sean I lee noticias en Internet y S particioa en redes sociales.
$P(S) = 0,62$, $P(I) = 0,81$ y $P(S \cup I) = 0,95$

a) $P(S \cup I) = P(S) + P(I) - P(S \cap I) \Longrightarrow P(S \cap I) = P(S) + P(I) - P(S \cup I) = 0,62 + 0,81 - 0,95 = 0,48$

b) $P(\overline{S}|\overline{I}) = \dfrac{P(\overline{S} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \dfrac{P(\overline{S \cup I})}{1 - P(I)} = \dfrac{1 - P(S \cup I)}{1 - P(I)} = \dfrac{1 - 0,95}{1 - 0,81} = \dfrac{5}{19} = 0,2632$

Problema 9 *(2 puntos)* Se sabe que la proporción de hogares españoles con dos o más ordenadores es $p = 0,75$. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 140$ hogares. Determine:

a) El número esperado de hogares que no tendrán dos o más ordenadores en la muestra elegida.

b) La probabilidad de que, en la muestra de 140 hogares, el número de ellos con dos o más ordenadores sea entre 98 y 112 hogares.

Solución:

$$B(140; 0,75)$$

a) $E[X] = np = 140 \cdot 0,75 = 105$ hogares tienen dos o más ordenadores, luego $140 - 105 = 35$ hogares no los tendrán.

b) $n = 140 > 30$, $np = 140 \cdot 0,75 = 105 > 5$ y $nq = 140 \cdot 0,25 = 35 > 5 \Longrightarrow$

$$B(140; 0,75) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(105; 5,1235)$$

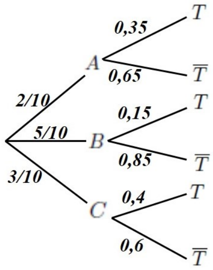
$P(98 \leq X \leq 112) = P\left(\dfrac{97,5 - 105}{5,1235} \leq Z \leq \dfrac{112,5 - 105}{5,1235}\right) = P(-1,46 \leq Z \leq 1,46) = P(Z \leq 1,46) - P(Z \leq -1,46) = 2P(Z \leq 1,46) - 1 = 2 \cdot 0,9279 - 1 = 0,8558$

Problema 10 *(2 puntos)* Durante el adiestramiento de un perro para encontrar trufas, se le deja libre una vez al día en una zona de monte apropiada para encontrar este preciado hongo. En cada operación de búsqueda del animal se ha observado que este se dirige siempre hacia una de tres zonas de monte diferentes, denominadas A, B y C. En dos de cada diez operaciones de búsqueda se dirige hacia A, en cinco de cada diez hacia B y el resto hacia C. El perro detecta trufas en A un 35 % de las veces, un 15 % en B y un 40 % en C. Eligiendo al azar un perro en adiestramiento, calcule la probabilidad de que:

a) Detecte una trufa en una operación de búsqueda.

b) Sabiendo que ha encontrado una trufa, esta haya sido encontrada en la zona B.

Solución:
Sean A se dirige a zona A, B se dirige a zona B, C se dirige a zona C, T detecta trufa y $\overline{T}$ no detecta trufa.



a) $P(T) = P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B) + P(T|C)P(C) =$
$0,35 \cdot \dfrac{2}{10} + 0,15 \cdot \dfrac{5}{10} + 0,4 \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{53}{200} = 0,265$

b) $P(B|T) = \dfrac{P(T|B)P(B)}{P(T)} = \dfrac{0,15 \cdot \frac{5}{10}}{\frac{53}{200}} = \dfrac{15}{53} = 0,2830$